Die Summe der Quadrahlen

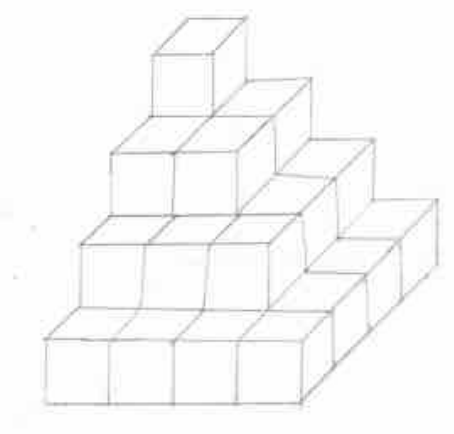
(Felix Voigt, 30.07.23)

Für die Summe der ersten ***n*** natürlichen Zahlen gibt es eine Formel zur Berechnung, die Gauß als Schüler angeblich selbst entdeckt hat. Für die Summen der ersten **n** Quadratzahlen, Kubikzahlen, Zahlen hoch 4, Zahlen hoch 5 … gibt es auch Formeln. Die Formeln sind Polynome ***k***-ter Ordnung, wobei ***k*** der Exponent ist, mit dem die natürlichen Zahlen potenziert werden.

Ich fragte mich, ob es geometrische Anschauungen gibt, anhand derer die Formeln verstanden werden können. Zu der Formel für die Summe der ersten **n** Quadratzahlen fiel mir folgendes ein:

Wenn man die Quadrahtzahl $\boldsymbol{i^2}$ ($\boldsymbol{i}$ = 1, 2, 3 …) als Quadrat mit Seitenlänge ***i*** interpretiert, dann kann man den ersten ***n*** solcher Quadrate eine Art Pyramide bauen. Dazu muss man sich die Quadrate räumlich vorstellen – als Platten, die eine Höhe eins haben. Die zu $\boldsymbol{i^2}$ gehörende Platte besteht dann aus $\boldsymbol{i^2}$ Würfeln mit der Seitenlänge 1. Die Summe der Quadratzahlen entspricht dann dem Volumen des Gebildes, das man aus den Platten baut.

Für den Fall n = 4 sieht die Summe der Quadrahtzahlen z.B. folgendermaßen aus.



(Bild 1)

Die Summe der Quadrahtzahlen entspricht dem Volumen dieser “Pyramide“. Das Gebilde ist aber nicht exakt eine Pyramide, denn die beiden nach vorne zeigenden Seitenflächen sind nicht glatt. Man kann aber die Summe der Quadratzahlen durch das Pyramidenvolumen annähern, damit ist

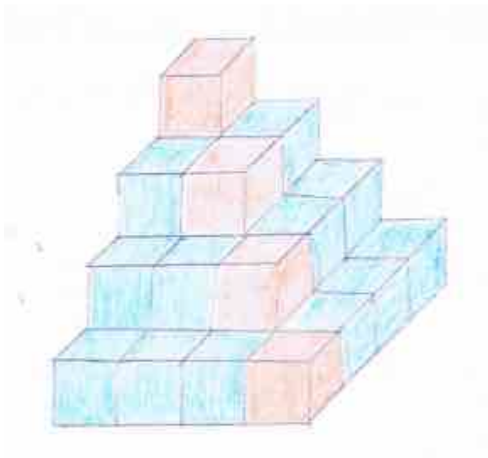
$$1^2+2^2+3^2+4^2 \approx \frac{1}{3}\cdot \text{Grundfläche}\cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 4 = \frac{64}{3} = 21\tfrac{1}{3} \qquad \text{(Formel 1)}$$

Exakt wäre

$$1^2+2^2+3^2+4^2 = 1+4+9+16 = 30 \qquad \text{(Formel 2)}$$

Das ist etwas mehr.

Doch man kann die geometrische Formel ausbessern. Legt man eine Pyramide mit Grundfläche 4^2 und Höhe 4 in das Gebilde aus Zeichnung 1, so schneidet die Pyrmide die auf den vorderen beiden Seitenflächen des Gebildes liegenden Würfel entzwei. Um das exakte Ergebnis der Summe der ersten 4 Quadrahtzahlen zu erhalten, muss man die abgeschnittenen Teile zum Volumen der Pyramide hinzuaddieren.



(Bild 2)

Die im Bild 2 blau gezeichneten Würfel werden von einer der beiden vorderen Seitenflächen der Pyramide genau in je zwei gleich große Teile zerschnitten. Also muss man pro blauen Würfel ½ zum Ergebnis aus Formel 1 addieren. Es gibt 2*(1+2+3) = 12 blaue Würfel, also muss man 6 addieren.

Die im Bild 2 orange gezeichneten Würfel an der vorderen Kante der "Pyramide" werden von der richtigen Pyramide zweimal zerschnitten (von beiden vorderen Seitenflächen), so dass von jedem Würfel nur noch eine kleine Pyramide übrigbleibt, die der großen ähnelt. Vom Volumen 1 bleibt also nur 1/3 übrig, also muss man pro orangefarbenen Würfel 2/3 zum Ergebnis addieren. Es gibt 4 orange Würfel, also muss man 8/3 addieren.

Damit ist das korrigierte Gesamtergnis

(Formel 3)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 21\frac{1}{3} + 6 + \frac{8}{3} = 27\frac{9}{3} = 30 \quad \checkmark$$

Das stimmt exakt mit Formel 2 überein!

Man kann das Verfahren verallgemeinern. Für die Summe

(Formel 4)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

erhält man eine geometrisches Gebilde, das ungefähr das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche $\boldsymbol{n^2}$ und der Höhe $\boldsymbol{n}$ hat, also 1/3*$\boldsymbol{n^3}$.

Dieses Volumen muss man ergänzen um 2*[1+2+3+...+(n – 1)]*1/2 "blaue" Halbwürfel, also um n*(n-1)/2. (Gaußsche Summenformel angewandt.)

Außerdem um n*2/3 "orange" Würfel-minus-Pyramide-Restvolumina.

Insgesamt ergibt sich:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}(n-1)\cdot n + \frac{2}{3}n = \underline{\underline{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}}$$

(Formel 5)

(Der letzte Buchstabe in der Formel ist ein ***n***.) Dies stimmt mit dem bekannten Ergebnis, z.B. aus dem „Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen" von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, Teubnersche Verlagsgesellschaft, z B.vierte Auflage (1961), S. 137 überein.