Die Summe der Kubikzahlen

Sehr erstaunt war ich, als ich in dem Buch “How To Solve It – A New Aspect of Mathematical Method” von G. Polya, Princeton University Press, Second Edition, Second Printing (1973) auf S. 115 las, dass die Summe der ersten *n* Kubikzahlen immer eine Quadratzahl ergibt. Beispielsweise ist

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 .$$

Das fand ich sehr faszinierend, da auf der linken Seite der Gleichung nur Kubikzahlen stehen und auf der rechten Seite eine Quadratzahl. Geometrisch heißt das, dass man die Kuben, die aus kleinen Würfeln bestehen, wieder in kleine Würfel zerlegen und diese kleinen Würfel in einem Quadrat anordnen kann. Das Ganze muss man dann doch geometrisch verstehen können?!

So, wie man geometrisch verstehen kann, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen immer eine Quadratzahl ergibt:

$1+3=4$ $\qquad$ $1+3+5=9$

Oder, dass die Summe der ersten n Zahlen sich durch $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ berechnen lässt (nach Gauß):

$$\text{Beispiel} \quad \overbrace{1+\underbrace{2+3}_{5}+4}^{5} = \underbrace{2\cdot 5}_{\underline{\underline{10}}} = \frac{4\cdot(4+1)}{2}$$

Die Formel, um die es hier geht, ist eine der Verallgemeinerungen der Gaußschen Summen-Formel und ist auch im „Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen“ von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, Teubnersche Verlagsgesellschaft, z B.vierte Auflage (1961), S. 137, allgemein unter dem Stichwort „Reihen, endliche numerische“ zu sehen:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}\cdot n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}\cdot n^2(n+1)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \left[1+2+3+\ldots+n\right]^2$$
$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{1}{30}\cdot n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Von den Verallgemeinerungen bis zum Exponenten 4 ist es die einzige, die nach Umformung super-einfach aussieht (dritte von oben in der Liste, 2 Umformungsschritte weglassen).

Als erstes fiel mir ein Beweis durch vollständige Induktion ein, das geht einfach, wenn man von “hinten” - also in der Formel von rechts – anfängt.

SUMME DER KUBIKZAHLEN

$$\left.\begin{aligned} 1+2^3 &= 9 = (1+2)^2 \\ 1+2^3+3^3 &= 36 = (1+2+3)^2 \end{aligned}\right\} \text{Beispiele}$$

$\vdots$

= Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\left\{(1^3+2^3+\dots+n^3) = (1+2+\dots+n)^2\right\} \text{allgemein}$$

Induktionsschritt

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 \overset{(IV)}{=}$$

$$(1+2+\dots+n)^2+(n+1)^3$$ ... geht so nicht weiter.

— Für den Induktionsschritt von der anderen Seite anfangen

$$\{1+2+\dots+n+(n+1)\}^2 =$$

$$(n+1)^2 + 2\cdot\{1+2+\dots+n\}\cdot(n+1) + \{1+2+\dots+n\}^2 \overset{(IV)}{=}$$

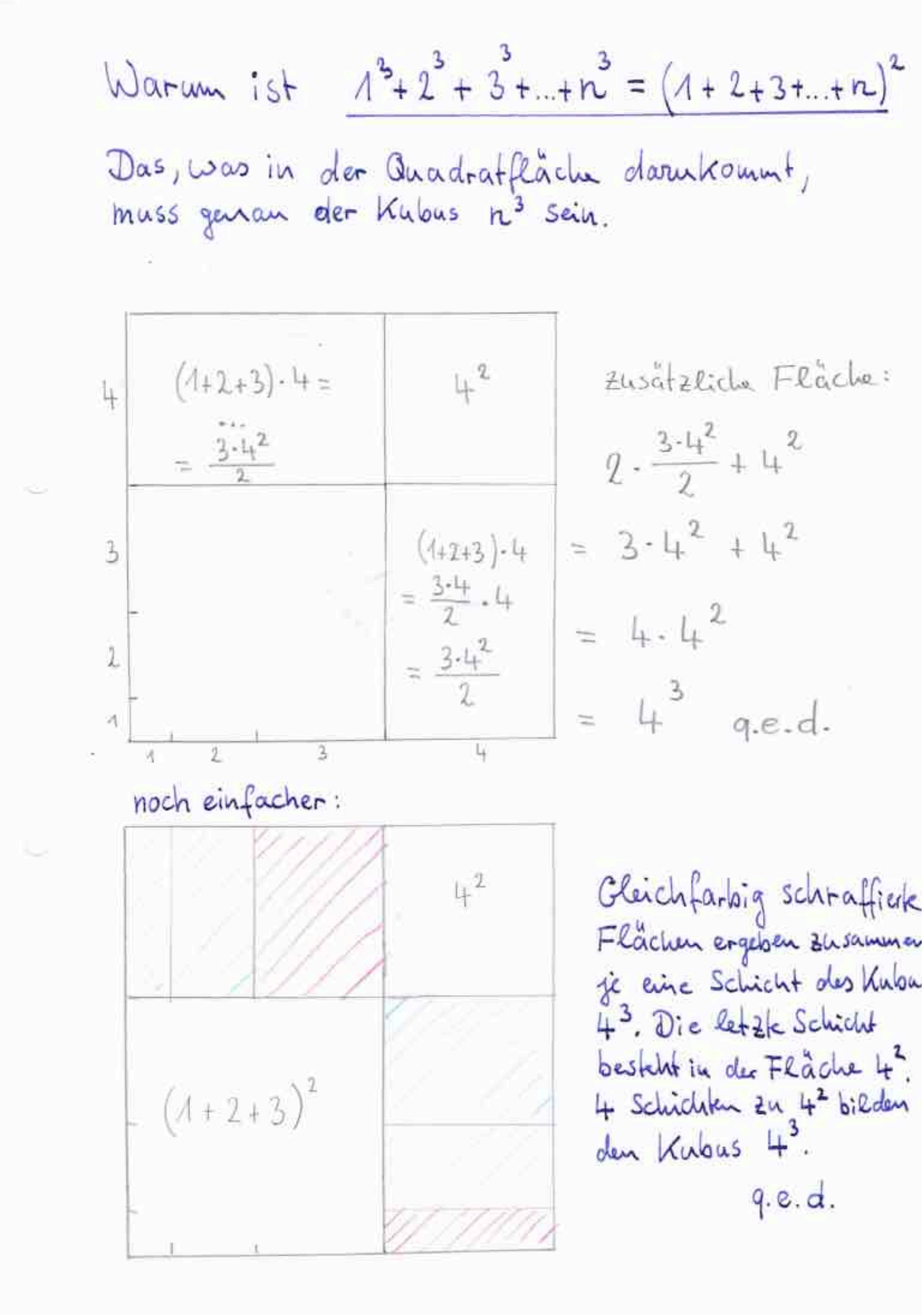
$$(n+1)^2 + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + 1^3+2^3+\dots+n^3 =$$

$$(n+1)^2\cdot\{1+n\} + 1^3+2^3+\dots+n^3 =$$

$$1^3+2^3+\dots+(n+1)^3,\quad \text{q.e.d.}$$

Verstanden habe ich die Formel dadurch nicht besser als davor. Wieso oder eher wie kombinieren sich Kuben zu einem Quadrat? Irgendwie wurde mir das aus dem Induktionsschritt nach einigem “Draufgucken” klar. Das “Irgendwie” war die Einsicht, dass der Term (n+1)^2 + 2*(1+...+n)(n+1) geometrisch als 3 Flächen gedeutet werden kann, die ein kleinere Quadrat zu einem größeren ergänzen und gleichzeitig einem Kubus entsprechen.

Und das sieht man so:



Schön oder? Am Schönsten finde ich, dass man die zwei Rechteckflächen noch so weiter unterteilen kann, dass sich durch Kombination von je zwei Flächen jeweils eine Querschnittsschicht des Kubus ergibt. Dadurch erhält man im obigen Beispiel 3 Schichten, die vierte noch fehlende ist die Quadratfläche 4^2.

Das Ganze ist für den Schritt von $n = 3$ zu $n = 4$ dargestellt, es geht genau so für alle anderen Fälle.