

Universität Oldenburg

Fachbereich 8, Diplom-Studiengang Physik
Studienarbeit in Angewandter Physik

Überlegungen und Demonstrationen zu Möglichkeiten des Schwebens von Körpern in elektromagnetischen Feldern

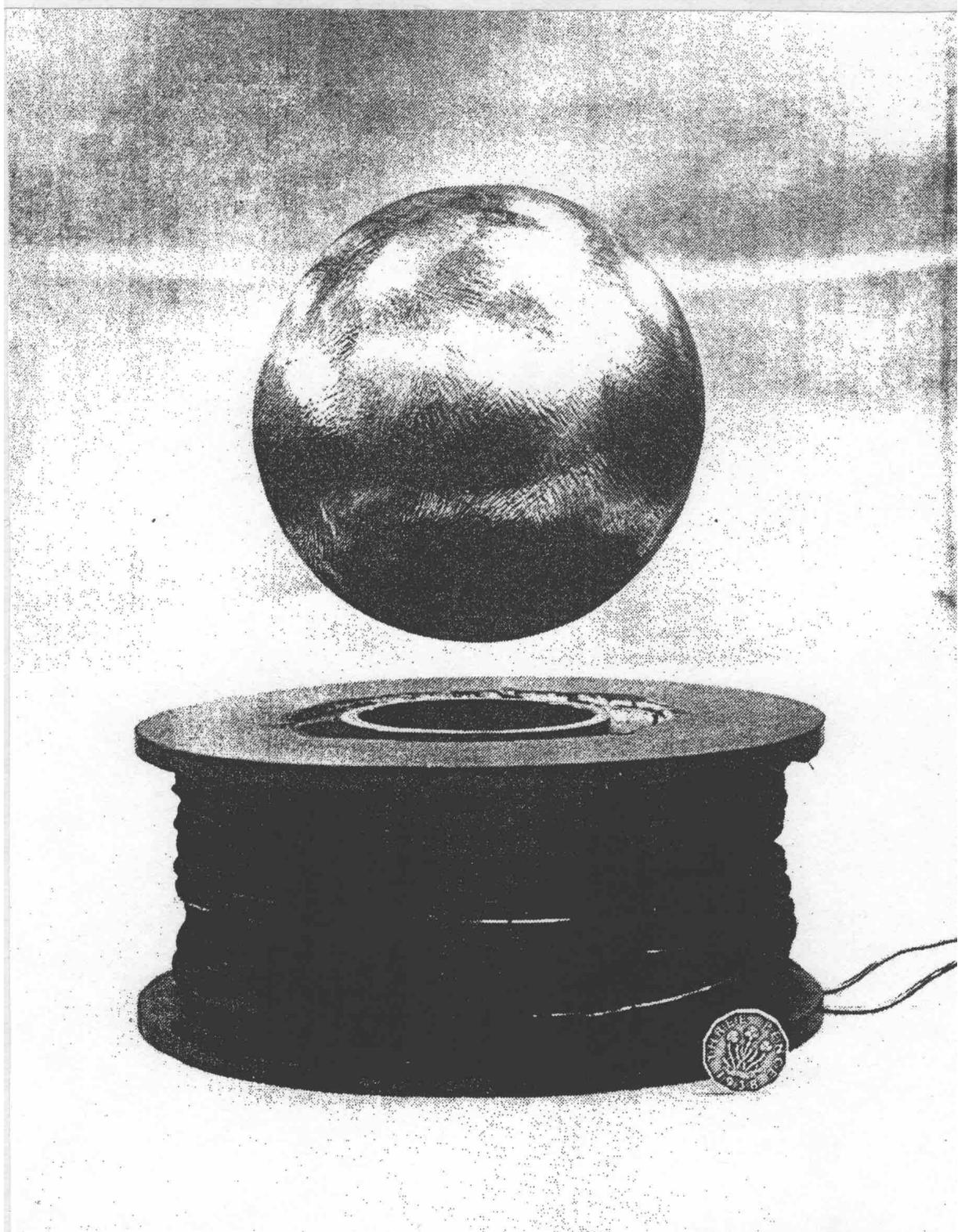
vorgelegt von

Felix Voigt

Betreuer und Gutachter Prof. Dr. K. Hinsch

Oldenburg, Januar 1999

Überarbeitete, erweiterte Fassung, 04.2006.



'Levitation of an Aluminium sphere by coils carrying current alternating at 50 Hz'
Aus [Laithwaite1] - siehe Literaturverzeichnis.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	0–1
1	Über die Richtung von Spannungspfeilen an elektronischen Bauelementen	1–1
1.1	Positivrichtungen von elektrotechnischen Größen	1–1
1.2	Spannung=Potentialdifferenz?	1–2
1.3	Die Lösung – der Energieerhaltungssatz	1–3
1.4	Die wichtigsten Formeln in der im letzten Abschnitt getroffenen Konvention	1–5
2	Das Theorem von Earnshaw oder: Statisches, stabiles, freies Schweben in elektrostatischen Feldern verboten	2–1
2.1	Earnshaw's Theorem	2–1
2.2	Ausgedehnte, geladene, starre Körper	2–2
2.3	Einfluß von Polarisaton; Levitation in statischen magnetischen Feldern	2–3
3	Apparaturen zum Schweben von Körpern in elektromagnetischen Feldern, Anwendungen	3–1
4	Der schwebende magnetische Kreisel	4–1
4.1	Schwebeanleitung und Beobachtungen	4–1
4.2	Wie funktioniert der Levitron?	4–2
4.3	Seitliche Stabilität des oberen Dipols	4–3
4.4	Ausblicke	4–5
5	Die Thomson-Ring-Apparatur	5–1
5.1	Versuch 'springender Ring'	5–1
5.2	Versuch 'schwebender Ring'	5–2
5.3	Beschreibung der im Rahmen der Studienarbeit gebauten Thomson-Ring-Apparatur	5–4
5.4	Konfiguration des Magnetfeldes	5–5
5.5	Sprunghöhen und Schwebehöhen	5–5
5.6	Die Phasenlage des beim Versuch 'schwebender Ring' in diesem induzierten Stromes	5–8
5.7	Stabilitätsanalyse	5–9
6	Didaktik	6–1
6.1	Vorschläge zur Behandlung des Themas Levitation in Vorlesungen	6–1
6.2	Vorschläge zur Benutzung der Thomson-Ring-Apparatur in Vorlesungen.	6–2
6.3	Technische Hinweise und Vorschläge für apparative Einstellungen bei Versuchen mit der Thomson-Ring-Apparatur	6–3

Anhänge A, B, C

Photoanhang

Literaturverzeichnis

0 Einleitung

Wer ist nicht schon einmal verblüfft worden durch den Anblick einer ‘schwebenden Jungfrau’ unter den beschwörenden Bewegungen eines Zauberers? – oder durch die Entdeckung eines in einem Luftstrom schwebenden kleinen Plastik-Balls in einem naturwissenschaftlichen Museum? (Dieser Versuch kann auf einfache Weise mit einem Tischtennisball und einem Föhn nachgemacht werden.) Präsentationen von scheinbar frei und berührungslos im Raum levitierenden Körpern haben auf Zuschauer seit jeher einen geisterhaften, okkulten, aber auch faszinierenden Eindruck gemacht.

Herders Sprachbuch verrät in seiner zweiten Auflage aus dem Jahre 1964 unter dem Stichwort ‘schweben’ folgendes:

schweben, Ztw. (Erbw.) sich frei in der Luft, in, auf dem Wasser halten oder bewegen; ...

In dieser Bedeutung verwende ich das Wort auch in der Studienarbeit. Eine kleine Ausnahme mache ich darin, daß ich das Wort ‘schweben’ zum Teil auch für an einem Ort im Raum verweilende Körper benutze, die sich in Anordnungen befinden, in denen sie nicht völlig frei und berührungslos beweglich sind, sondern in einer oder zwei Richtungen geführt werden. Das Attribut ‘frei’ wird hier bei ‘Schweben’ in dem Sinn verstanden, daß sich zwischen dem schwebenden Körper und seiner Umgebung Freiraum befindet, er also keine anderen Festkörper berührt. Im Freiraum dürfen sich Luft oder andere Gasgemische befinden oder auch Flüssigkeiten.

Unter ‘Levitation’ ist in Meyers Enzyklopädischem Lexikon aus dem Jahre 1975 [Meyers Lexikon] folgendes zu lesen:

Levitation [zu lat. levitas=Leichtigkeit] vermeintl. Aufhebung der Schwerkraft, freies Schweben eines Körpers im Raum; als Traumerlebnis oder als parapsychologische Erscheinung.

Bei Gebrauch dieses oder eines davon abgeleiteten Wortes in der Studienarbeit ist niemals der okkulte Anteil seiner Bedeutung gemeint. Die Wörter ‘levitieren’ und ‘Levitation’ werden hier in genau der gleichen Bedeutung benutzt wie die deutschen Wörter ‘schweben’ bzw. ‘das Schweben’.

Am unglaublichsten wirken schwebende Gegenstände, wenn die Ursache des Schwebens nicht direkt mit unseren Sinnen wahrgenommen werden kann. So ist eine im Deutschen Museum in München zu sehende, unter einem regelbaren Magneten levitierende Eisenkugel für die meisten Besucher besonders eindrucksvoll. Bei dem ebenfalls dort zu findenden, in einem Luftstrom schwebenden Plastik-Ball kann die Ursache des Luftstroms leicht entdeckt werden. Die magnetischen Kräfte, durch welche die Eisenkugel in der Luft gehalten wird, sind jedoch für uns nicht unmittelbar erfahrbar.

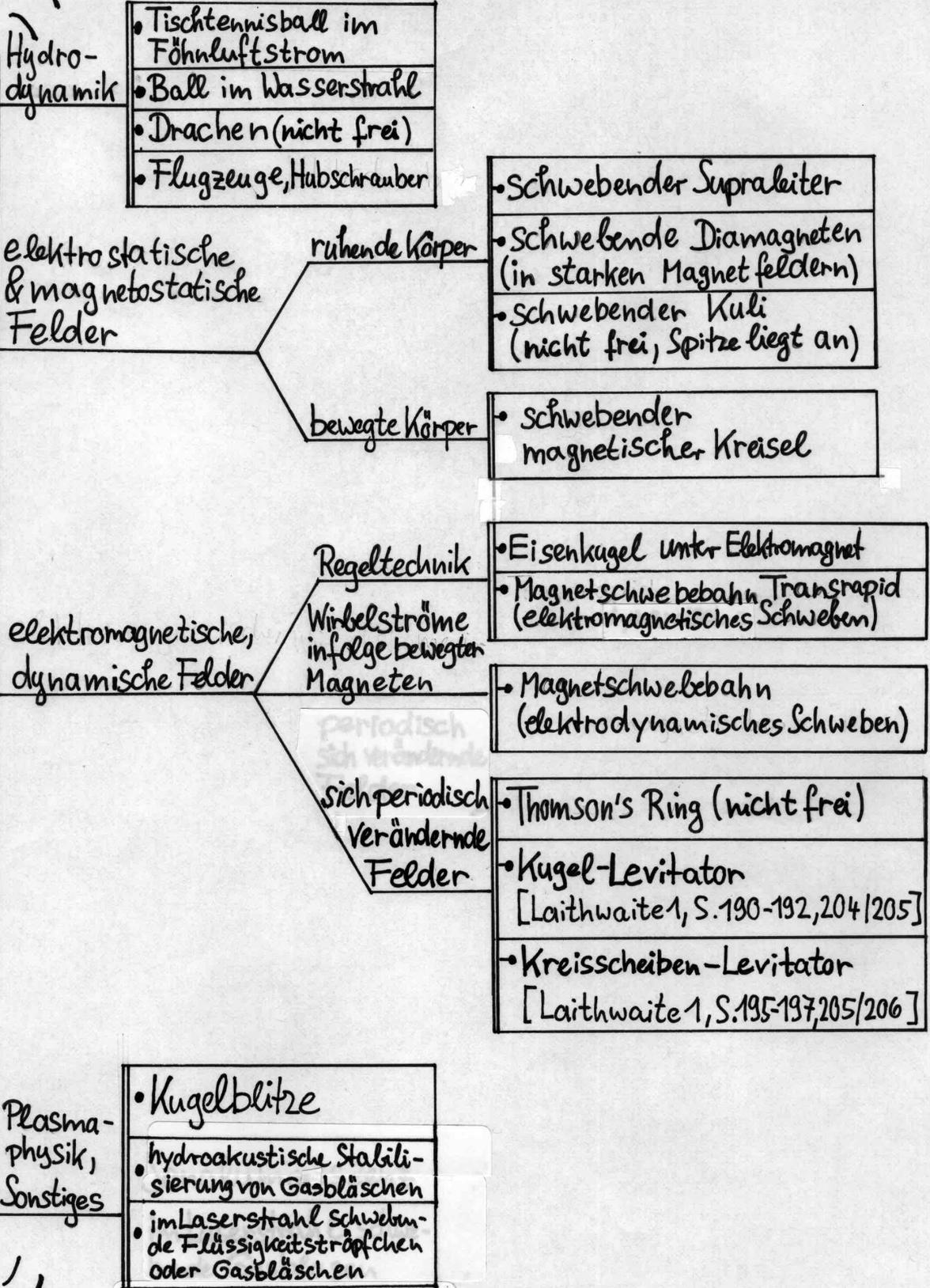
Die einzigen, in der Physik bisher bekannten, weitreichenden Kräfte, deren Übertragung von uns Menschen nicht direkt wahrgenommen werden kann, sind elektromagnetische Kräfte (insbesondere die elektrostatische und die magnetostatische Kraft und Lorentzkräfte) und die Gravitationskraft. Anliegen der Studienarbeit war es, beispielhaft einige Möglichkeiten zu untersuchen, Körper mit Hilfe der obengenannten Arten von Kräften zum Schweben zu bringen (Kapitel 3, 4, 5), und außerdem prinzipielle Aussagen über Möglichkeit bzw. Unmöglichkeit des Schwebens von Körpern in elektrodynamischen Feldern unter bestimmten Voraussetzungen zu sammeln (Kapitel 2). Das Schweben von Körpern in Flüssigkeiten oder strömenden Gasen wurde hier nicht untersucht.

In dem auf der übernächsten Seite abgebildeten Baumdiagramm wird ein allgemeiner Überblick über eine Reihe von Möglichkeiten der Levitation im weitesten Sinne gegeben. Einige existierende Levitationsvorrichtungen der uns interessierenden Art und Anwendungen, insbesondere bei Magnetschwebebahnen, werden im Kapitel 3 der Studienarbeit kurz angesprochen. In den Kapiteln 4 bzw. 5 werden der schwebende magnetische Kreisel und die Thomson-Ring-Apparatur ausführlich untersucht. Im Rahmen der Studienarbeit wurde eine

Thomson-Ring-Apparatur gebaut, die in Vorlesungen benutzt werden soll. In diesem Zusammenhang werden im Kapitel 6 didaktische Vorschläge und Vorschläge zur Benutzung der Apparatur gemacht. Mit einer sehr grundlegenden Frage der Elektrotechnik beschäftigt sich das erste Kapitel der Studienarbeit: mit dem Richtungssinn von Spannungen. Dort dargelegte Ergebnisse und in diesem Kapitel getroffene Konventionen werden im Kapitel 5 bei der Untersuchung der Thomson-Ring-Apparatur angewandt.

Möglichkeiten der Levitation

L
E
V
I
T
A
T
I
O
N



1 Über die Richtung von Spannungspfeilen an elektronischen Bauelementen

Jeder Physikstudierende lernt irgendwann die zweite der beiden grundlegenden Regeln der Elektrotechnik kennen, die nach Kirchhoff benannt sind – die Maschenregel. Sie besagt, daß in jeder beliebigen geschlossenen Masche eines elektrischen Netzwerkes die Summe aller an den einzelnen Bauteilen abfallenden Spannungen Null ergibt. Voraussetzung für die Gültigkeit ist, daß alle Spannungen in demselben Umlaufsinn gezählt werden (Abb. a*1-1) Eine Spannung zählt positiv, wenn der zugehörige Spannungspfeil in Richtung des gewählten Umlaufsinn der Masche zeigt. Sie wird negativ berechnet, wenn der Spannungspfeil gegen den Umlaufsinn gerichtet ist. Dabei ist der hier verwendete Begriff eines Spannungspfeiles noch zu klären. Die in Schaltbildern eingezeichneten Spannungspfeile stellen einerseits durch ihre Länge die Größe der Spannung dar, andererseits geben sie die Richtung der anliegenden Spannung an. Insofern stehen Spannungspfeile für meßbare Größen. Der Umlaufsinn der Masche kann willkürlich festgelegt werden. Es gibt genau zwei Möglichkeiten.

Ziel dieses Kapitels ist es zu klären, wie die Richtungen von Spannungspfeilen konsistent festgelegt werden. (In der Literatur [Führer] wird die Festlegung der Richtung von Spannungspfeilen als Richtungssinn der Spannung bezeichnet.) Leitgedanke ist dabei die Richtigkeit der Maschenregel. Letztlich läuft dies auf das Suchen nach einer umfassenden Begründung für diese Regel hinaus.

Der folgende Abschnitt handelt von den Festlegungen, die getroffen werden müssen, um elektrotechnische Größen einschließlich ihrer Richtungen festzulegen. Im zweiten Abschnitt wird dargelegt, welche Paradoxa entstehen, wenn man, ausgehend von einer sehr einleuchtend erscheinenden Definition für die Richtungen der Spannungspfeile, konsequent weiterdenkt. Diese Widersprüche haben mich auf die im darauffolgenden Abschnitt erläuterte Richtungskonvention geführt. Im letzten Abschnitt werden die wichtigsten Formeln für Spannungen an Bauteilen in dieser Konvention aufgelistet. Außerdem wird über die in einer Spule induzierte Spannung im Zusammenhang mit der Lenzschen Regel und dem im Induktionsgesetz $U_{ind} = -\dot{\Phi}$ üblichen Minuszeichen nachgedacht.

1.1 Positivrichtungen von elektrotechnischen Größen

Viele der in der Elektrotechnik auftauchenden Größen sind Skalare: die Ladung Q , der Strom I , die Spannung U , der magnetische Fluß Φ . Selbst das elektrische und das magnetische Feld haben hier skalaren Charakter, denn es spielen meist nur Komponenten dieser Vektoren eine Rolle, die in Richtungen zeigen, die sich aus der Geometrie der Drähte ergeben. Es ist sinnvoll, für die meisten Skalare positive und negative Werte zuzulassen. Man rechnet sozusagen mit 1-dimensionalen Vektoren. Zur Messung dieser Skalare muß nun jeweils eine Richtung oder eine Vorschrift vorgegeben werden, die bestimmt, wann die betreffende Größe positiv gezählt werden soll. Diese Richtung soll *Positivrichtung* heißen. Positivrichtungen werden hier in Abbildungen durch gestrichelte Pfeile dargestellt. Diese *Positivpfeile* geben sozusagen die x -Richtung des eindimensionalen Koordinatensystems an, worin die betreffende Größe für das jeweilige Bauelement gemessen werden soll. (In der Literatur [Führer] werden in diesem Zusammenhang die Begriffe Bezugsrichtung oder synonym Zählrichtung verwendet. Die diese Begriffe darstellenden Pfeile heißen dort Bezugspfeile oder Zählpfeile.)

Will man die Positivrichtung aller Größen festlegen, die in einem elektrischen Stromkreis vorkommen, so muß man mindestens die Positivrichtung einer Größe willkürlich wählen. Die Positivrichtungen der anderen Größen ergeben sich dann meist zwangsläufig oder durch Festlegung sinnvoller Vereinbarungen. Beispielsweise muß zur Bestimmung der Ladung Q eines Kondensators eine der beiden Platten als Positivplatte ausgezeichnet werden. Q wird als die auf dieser Platte sich befindende Ladung definiert und kann - je nach Ladungsart - entweder positiv oder negativ sein. Die Positivrichtung des elektrischen Stromes $I = \dot{Q}$ ergibt sich daraus zwingend (Abb. b*1-1). Dabei gibt I die technische

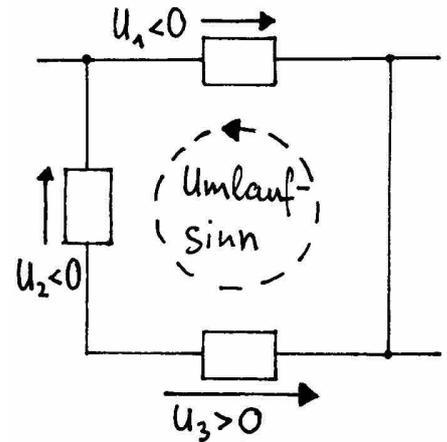


Abb. a*1-1: Maschenregel.

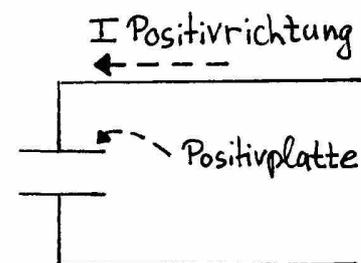


Abb. b*1-1: Positivrichtung des Stromes I .

Stromrichtung an, die in Metallen der Bewegungsrichtung der Elektronen entgegen zeigt. Die Positivrichtung der zeitlichen Veränderung \dot{I} des Stromes steht damit auch fest.

Ähnlich erhält man die Positivrichtung des Magnetfeldes innerhalb einer Spule aus der des Stromes. Sie soll in die Richtung des Magnetfeldes zeigen, das entsteht, wenn ein Strom in Positivrichtung durch die Spule fließt. Kurz schreibt man hier B für die in diese Richtung zeigende Komponente des Magnetfeldes. Die Positivrichtung für die Spannungen an den Bauelementen eines Stromkreises liegt auch auf der Hand. Man wählt am natürlichsten jeweils dieselbe, die man für den Strom festgelegt hat. (Im Buch [Führer] wird diese Konvention als Verbraucherpeilsystem bezeichnet. Sie ist die dort üblicherweise getroffene Wahl.)

Den im einleitenden Abschnitt zu diesem Kapitel erwähnten Umlaufsinn einer Masche legt man am einfachsten entlang der Positivrichtung der Spannungen fest. Schon bei Netzwerken, die aus zwei Einzelmaschen bestehen ist es nicht mehr möglich, die Positivrichtungen der Spannungen so festzulegen, daß in jeder Masche die Positivpfeile allesamt in einem für die jeweilige Masche einheitlichen Umlaufsinn verlaufen. Dann müssen Spannungen, deren Positivrichtungen dem Umlaufsinn entgegenzeigen, in der Maschenregel mit einem Minuszeichen versehen werden. Prinzipiell muß man sich darüber im Klaren sein, daß die Positivrichtungen jeder elektrotechnischen Größe an allen einzelnen Bauelementen beliebig und völlig unabhängig voneinander gewählt werden können. Durch die oben beschriebenen Festlegungen erhalten Größengleichungen wie die Maschenregel jedoch eine schöne, einfache Form. Das Kapitel 5 ist der einzige andere Ort in dieser Studienarbeit, wo Stromkreise und die dabei auftretenden Größen eingehend untersucht werden. Da hierbei nur aus einer einzigen Masche bestehende Stromkreise vorkommen, können und werden wir die Positivrichtungen in einer dem Obengesagten entsprechenden, natürlichen Weise festgesetzt annehmen.

Grundsätzlich muß streng unterschieden werden zwischen Positivpfeilen von Größen und den aktuellen Richtungen der Größen, die durch Größenpfeile (z.B. Spannungspfeile) angegeben werden. In Skizzen ist es durchaus aussagekräftig, Größenpfeile einzutragen, ohne die Positivrichtungen dieser Größen festgelegt zu haben – genauso wie es sinnvoll ist, Kräftepfeile an Körpern anzuzeichnen, ohne ein Koordinatensystem festgelegt zu haben. Die lesende Person braucht sich also nicht zu wundern, wenn in einigen der folgenden Abbildungen keine Positivrichtungen definiert werden.

Es bleibt jetzt noch zu klären, was denn bedeutet, an einem Bauelement zeige die Spannung per se in die eine oder die andere Richtung. (In der in [Führer] benutzten Terminologie heißt das, wir haben uns Gedanken über eine sinnvolle Wahl der Bezugsrichtungen gemacht, wogegen über den Richtungssinn der Spannung noch gar nicht geredet wurde). Dem Leser wird dazu vielleicht folgendes einfallen: "Ist denn nicht Spannung dasselbe wie eine Potentialdifferenz?"

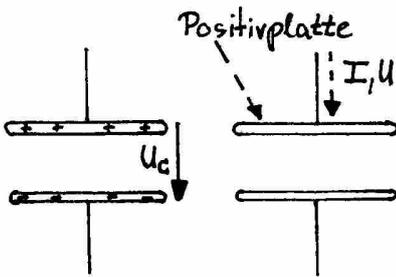


Abb. c*1-2: Potentialdifferenz am Kondensator.

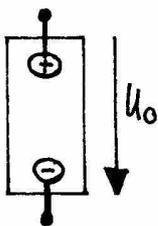


Abb. d*1-2: Spannungsquelle.

1.2 Spannung=Potentialdifferenz?

Es ist eine naheliegende Idee, die Spannungspfeile als Differenzen des elektrischen Potentials φ aufzufassen. Ein Spannungspfeil zwischen zwei Punkten eines elektrischen Netzwerkes solle etwa immer vom höheren Potential zum tieferen zeigen, d.h. von + nach -. In der Elektrostatik zeigen damit Spannungspfeile grob in Richtung des elektrischen Feldes \mathbf{E} , da $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ gilt. Die Konsequenzen dieser Idee werden im Folgenden analysiert.

Beim Plattenkondensator zeigt der Spannungspfeil in diesem Fall von der positiven zur negativen Platte (Abb. c*1-2). Es gilt $U_C = +Q/C$. Daraus ergibt sich bei Wechselstrom der Kreisfrequenz ω wegen $\dot{U}_C = +I/C$ die bekannte Strom-Spannungs-Beziehung $U_C = I/i\omega C$.

Die Richtung des Spannungspfeiles zwischen den Ausgängen einer Spannungsquelle kann man sich überlegen, indem man die Quelle als Kondensator mit unerschöpflichem Speichervolumen auffaßt (Abb. d*1-2). Der Pfeil startet also beim +Pol und endet am -Pol. Dies ist etwas verwirrend, denn er zeigt genau dem Strom entgegen, der normalerweise durch die Quelle fließt. Die an einem Verbraucher abfallende Spannung U_R ist nach der Maschenregel jedoch

derjenigen der Quelle entgegengerichtet, so daß der in einem Ohmschen Verbraucher fließende Strom in Richtung der Verbraucherspannung fließt (Abb. e*1-3). Spannungspfeile an Quellen entgegengesetzt der gebräuchlichen Stromrichtung zu zeichnen ist eine übliche Konvention, die z.B. in [Lindner] benutzt wird.

Man muß sich darüber klar sein, daß obige Analogie von Spannungsquelle und Kondensator keine streng schlüssige Deduktion der Richtung des Spannungspfeiles der Quelle aus der ursprünglichen Idee von Spannungspfeilen als Potentialdifferenzen ist. Die Quellspannung kann etwa in einer Batterie durch chemische Reaktionen im Zusammenspiel mit Ionentransport aufgebaut werden. Bei Stromstillstand wird sich zwar im Inneren zwischen den beiden Polen der Batterie ein elektrisches Feld aufbauen – dieses Feld ist jedoch nicht die ‘treibende Kraft’ für den Stromfluß, sondern ein sekundärer Effekt. Primäre Ursache für den Strom sind Redoxreaktionen an den Elektroden. Außerdem bewegen sich bei Stromfluß effektiv Ladungen durch die Batterie, während sie beim Kondensator nur von den Platten abfließen.

Die Idee scheitert jedoch in voller Klarheit an der Spule. Entscheidend dafür ist, daß hier bei Wechselstrom das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{B} zeitabhängig sind, so daß nun nicht mehr $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ist, sondern $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Das elektrische Feld ist also nicht konservativ und es existiert kein elektrisches Potential φ mit der Eigenschaft $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$. Dessenungeachtet kann man zwar innerhalb der Spule $\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} d\mathbf{l}$ definieren, wobei nur über Leiterstücke $d\mathbf{l}$ der Spule integriert werden soll, ausgehend von einem Startpunkt \mathbf{r}_0 im Spulendraht. (Achtung: In einer kurzgeschlossenen Spule führt dies zu Mehrdeutigkeiten, wenn man von einem Ende der Spule über den kurzschließenden Draht zum anderen Ende integriert (Abb. f*1-3). Es soll jedoch hier nur im Inneren der Spule integriert werden.) Die sich daraus ergebende Richtung des Spannungspfeiles widerspricht jedoch der Maschenregel, wie aus folgender Momentaufnahme eines aus einer Spule und einem Kondensator bestehenden Schwingkreises klar wird (Abb. g*1-3). Die Richtung des elektrischen Feldes ergibt sich dabei aus der Maxwellischen Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$, wobei angenommen wird, daß $\dot{\mathbf{B}}$ in der Spule momentan nach oben zeigt. Die im Bild eingezeichnete Art der Ladung des Kondensators folgt aus der Richtung des elektrischen Feldes in der Spule. Wäre die Polarität des Kondensators umgekehrt, so würden sofort positive Ladungen der oberen Platte entlang den Feldlinien der Spule auf die untere Platte fließen, da der Ohmsche Widerstand der Leitungen vernachlässigbar klein sein soll. (In Wirklichkeit bewegen sich natürlich Elektronen in den Leitungen.) Damit zeigen beide Spannungspfeile entlang demselben Umlaufsinn des Stromkreises, was der Maschenregel widerspricht.

Über die Idee, Spannungspfeile als gerichtete Differenzen des elektrischen Potentials aufzufassen, gelangt man also zu keiner fundamentalen Begründung der Maschenregel, die auch Induktionsvorgänge umfaßt. Ein Ausweg aus dieser Sackgasse wird über ein altbekanntes und sehr fundamentales Prinzip der Physik erreicht.

1.3 Die Lösung – der Energieerhaltungssatz

Zählt man alle Arbeiten zusammen, die ein Elektron des Leitungsdrahtes bei einem geschlossenen Rundlauf durch alle Bauteile eines aus nur einer Masche bestehenden Stromkreises leistet, so muß sich Null ergeben. Arbeiten, die ein Bauteil, z.B. eine Spannungsquelle, an dem Elektron leistet, sollen dabei negativ berechnet werden. Streng genommen muß man Arbeiten betrachten, die eine größere Ladungsmenge an Bauteilen verrichtet, um der statistischen Natur des Ladungstransports gerecht zu werden. Ursache für das Ergebnis obengenannter Rechnung ist der Energieerhaltungssatz. Arbeiten, die der Stromkreis an manchen Bauteilen verrichtet, müssen von anderen Bauteilen in gleichem Grad dem Stromkreis zugeführt werden. Am besten stellt man sich dies als Energieaustausch zwischen dem Stromkreis auf der einen Seite und allen Bauelementen auf der anderen Seite vor (Abb. h*1-3). Dabei darf keine Energie verloren gehen. Da die Leitungen des Stromkreis langfristig keine Energie speichern, sondern nur als Übermittler beim Energietransfer zwischen den Bauelementen fungieren können, ist der eigentliche Vorgang ein Energieaustausch zwischen allen Bau-

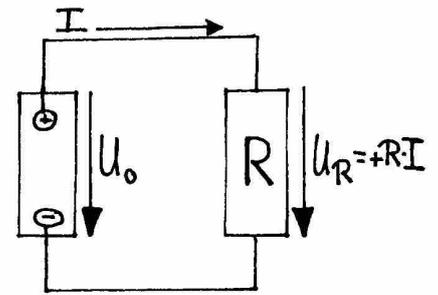


Abb. e*1-3: Spannungsquelle und Widerstand.

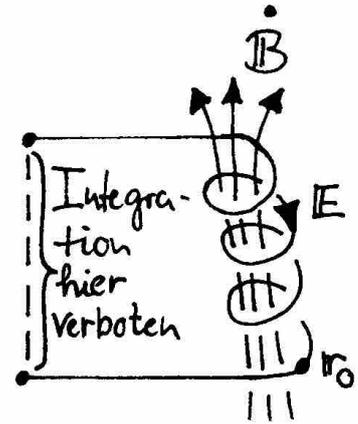


Abb. f*1-3: Versuch, die Spannung an einer Spule über ein verallgemeinertes Potential zu definieren.

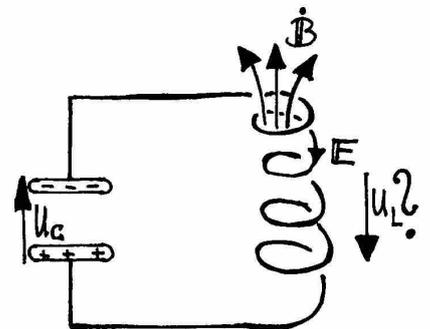


Abb. g*1-3: Mißlingen des Definitionsvorganges aus Abb. f*1-3.

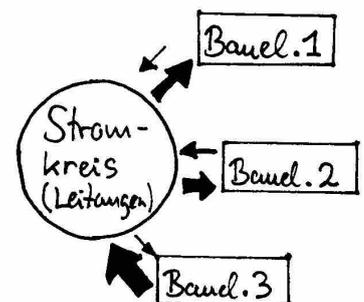


Abb. h*1-3: Energieaustausch.

elementen des Stromkreises. Aufgrund der Definition von Spannung als Arbeit pro Ladungsmenge kommt man so zu einer Festlegung der Richtung von Spannungspfeilen, die in demselben Rahmen wie der Energieerhaltungssatz gültig ist - soweit bekannt also uneingeschränkt. Es bieten sich grundsätzlich zwei Möglichkeiten an, von denen hier diejenige gewählt wird, die mit der im Abschnitt 1.2 diskutierten Idee soweit wie möglich übereinstimmt und die auch der in der Literatur [Lindner], [Führer], [Lunze] benutzten Konvention entspricht. Die für alles Weitere grundlegende Definition lautet:

Der Spannungspfeil an einem Bauelement zeigt in diejenige Richtung, in die eine positive Ladungsmenge fließen muß, damit das Bauteil Energie vom Stromkreis aufnimmt.

Bei Stromfluß in Richtung des Spannungspfeiles fungiert das Bauelement damit als Verbraucher. So wird klar, weshalb die im ersten Abschnitt beschriebene Festlegung, die Positivrichtungen für Spannung und Strom an Bauelement jeweils gleich zu wählen, in dem Buch [Führer] als Verbraucherpfeilsystem bezeichnet wird. Um die Festlegung auch für die Bauelemente eindeutig zu machen, bei denen die Richtung der Spannung von der Richtung der aktuellen Stromstärke abhängt, wie z.B. für Widerstände und Dioden, definieren wir umfassender:

Man zeichnet einen Spannungspfeil an einem Bauteil in Richtung des momentan fließenden Stromes, falls der Stromkreis zur Zeit Energie an das Bauelement abgibt.
 Man zeichnet einen Spannungspfeil an einem Bauteil entgegen der Richtung des momentan fließenden Stromes, falls der Stromkreis zur Zeit Energie von dem Bauelement erhält.

Die Maschenregel ist damit für eine einzelne, isolierte Masche durch den Energieerhaltungssatz begründet. Sie gilt jedoch auch für jede Masche eines beliebig komplizierten elektrotechnischen Netzwerkes, obwohl man sich vorstellen könnte, daß ein Netzwerk insgesamt den Energieerhaltungssatz erfüllt, jedoch nicht in jeder einzelnen Masche. Wäre die in einem Umlaufsinn berechnete Summe aller Spannungen in einer Masche nicht Null, so würden bei einem kleinen zusätzlichen Strom innerhalb der Masche die Bauelemente bei einer der beiden möglichen Richtungen des zusätzlichen Stromes effektiv Energie abgeben. Da der Stromkreis selbst keine Energie speichern kann, würde der Strom schnell auf einen Wert anschwellen, bei dem an den Ohmschen Widerständen zusätzliche Spannungen in dem Ausmaß abfallen, daß die Bauteile insgesamt nicht mehr Energie an den Stromkreis abgeben – die Maschenregel also erfüllt ist. Daß ein zusätzlicher Strom überhaupt entsteht, kann man damit begründen, daß Systeme dazu neigen, ein Energieminimum anzunehmen. Erst dann ist ein stabiler Zustand erreicht. Das betreffende System besteht hierbei aus allen Bauelementen der Masche. Eine genaue Analyse müßte untersuchen, wie die elektrischen Felder in der Nähe der Ein- und Ausgänge der Bauelemente mikroskopisch aussehen.

Die Gültigkeit der Maschenregel in einem Netzwerk ist äquivalent dazu, daß gerichtete Summen von Spannungen entlang einer zusammenhängenden Kette von Spannungspfeilen nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kette abhängen und nicht von der Lage des Wegs der Kette. Dies bedeutet, daß man eine Größe an allen Knotenpunkten des Netzwerkes definieren kann, so daß Spannungen zwischen zwei Punkten des Netzwerkes als Differenzen dieser Größe an den beiden Punkten berechnet werden können. Diese Größe – man könnte sie elektrotechnisches Potential nennen – ist *nicht* das aus der Elektrodynamik bekannte elektrische Potential.

Mit dem im letzten Absatz Gesagten ist klar geworden, daß die Maschenregel auch für verallgemeinerte Maschen gilt. Damit sind Maschen gemeint, deren Knotenpunkte nicht notwendig durch genau ein Bauelement verbunden zu sein brauchen.

Wie man aus Abb. i*1-5 erkennt, zeigt nach den obenstehenden eingerahmten Merkgeregeln und unter Berücksichtigung der Maxwellschen Gleichung rot $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ die in einer vom Strom I durchflossenen Spule durch Selbstinduktion entstehende Spannung in dieselbe Richtung wie die zeitliche Veränderung des Stromes

$$U_L = +L \cdot \dot{I}. \tag{A.1-5}$$

Dabei ist $L > 0$ die Induktivität der Spule. Bei Wechselstrom ergibt sich die gebräuchliche Formel $U_L = +i\omega L \cdot I$.

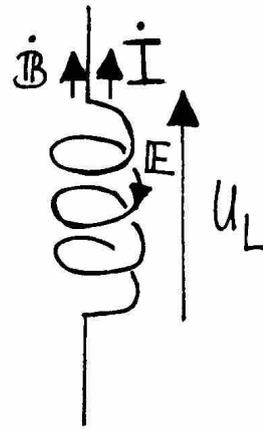


Abb. i*1-5: In einer Spule durch Selbstinduktion entstehende Spannung U_L .

1.4 Die wichtigsten Formeln in der im letzten Abschnitt getroffenen Konvention

In Tab. I-1-5 sind Formeln für die Spannungen an verschiedenen Bauelementen in der im Abschnitt 1.3 getroffenen Konvention aufgelistet. Die Richtungen der Spannungspfeile an Spannungsquellen, Kondensatoren, und Ohmschen Widerständen stimmen dabei mit den aus der vorläufigen Idee des Abschnitts 1.2 sich ergebenden Richtungen überein. Fundament für die Anwendung aller unten aufgelisteten Formeln ist die Maschenregel

$$\sum_i U_i = 0.$$

Bauelement	allgemein	Wechselstrom	Skizze
Spannungsquelle	U_0 zeigt von + nach -		
Kondensator	$U_C = + \frac{Q}{C}$	$U_C = \frac{1}{i\omega C} \cdot I$	
Ohmscher Widerstand	$U_R = +R \cdot I$	$U_R = R \cdot I$	
Spule	$U_L = +L \cdot \dot{I}$	$U_L = i\omega L \cdot I$	

Tab. I-1-5

Es sei angemerkt, daß die Vorzeichen in obenstehenden im Verbraucherpfilsystem angegebenen Strom-Spannungs-Beziehungen an Bauelementen experimentell überprüft werden können. Insbesondere läßt sich die in unseren Überlegungen maßgebliche Richtungsbeziehung zwischen Spannung und zeitlicher Änderung des Stromes an der Spule überprüfen, indem man Wechselfspannung an eine Spule anschließt und Strom (über einen in Reihe geschalteten Lastwiderstand) und Spannung an der Spule mit einem Oszilloskop mißt. Davor eicht man die am Oszilloskop dargestellten Strom- und Spannungsrichtungen am einfachsten mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle.

Für die in einer geschlossenen, vom magnetischen Fluß Φ durchsetzten Leiter Schleife induzierte Spannung U_{ind} wird oft geschrieben $U_{ind} = -\dot{\Phi}$ (vergl. etwa [Gerthsen et al., Gleichung (7.61)]. Unter der natürlichen Annahme, daß für die Positivrichtung der Spannung, des Stromes und des Magnetfeldes und auch für die Orientierung der Oberflächenelemente, über die zur Berechnung von Φ

integriert wird, dieselbe Richtung relative zum Umlaufsinn der Leiterschleife gewählt wird, ist dieses Minuszeichen falsch. Denn für eine aus N Wicklungen bestehende Spule der Länge l und Querschnittsfläche A , die mit ferromagnetischem Material der Permeabilität μ gefüllt ist, würde im Gegensatz zu Gleichung (A-1-5) folgen

$$U_L := U_{ind} = -NA \cdot \dot{B} = -NA(\mu_0 \mu N/l) \cdot \dot{I} = -L \cdot \dot{I}$$

mit der magnetischen Feldkonstante μ_0 . In älterer Literatur wird der Begriff 'Elektromotorische Kraft' (EMK) für induzierte Spannungen verwendet, wobei die Maschenregel die Form $\sum_i EMK_i = \sum_i U_i$ annimmt (vergl. [Lunze, Gleichung (1.8)]). Elektromotorischen Kräfte sind also Spannungen in heutigem Sinn, nur mit umgekehrten Vorzeichen. In der älteren Schreibweise ist die Formel $EMK = -\dot{\Phi}$ korrekt. In [Führer, zweiter Band, Gleichung (24.1)] und in [Lindner, Gleichung (2.58)] sieht man das Induktionsgesetz ohne Minuszeichen, wie auch wir es benutzen werden,

$$U_{ind} = \dot{\Phi}. \quad (\text{B-1-6})$$

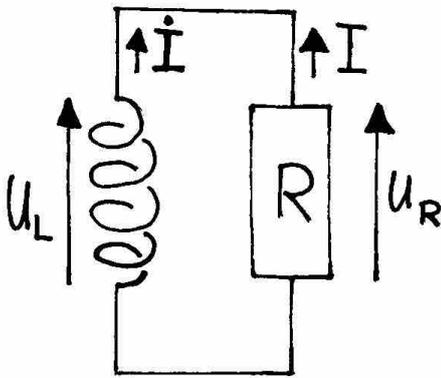


Abb. j*1-6: Erläuterung zur Lenzschen Regel.

Es entsteht leicht der Eindruck, daß man mit dem Minuszeichen in $U_{ind} = -\dot{\Phi}$ und damit auch in $U_L = -L \cdot \dot{I}$ der Lenzschen Regel gerecht würde. Diese wird jedoch in unserer Konvention ohne das $-$ Zeichen erfüllt. Die Lenzsche Regel besagt, daß die Auswirkung eines Induktionsvorgangs immer deren Ursache entgegengesetzt ist. Als Ursache der Induktion in einer Spule kann die Änderung des Stromes gelten, \dot{I} . (Genausogut natürlich die proportionale Größe \dot{B} .) Die Auswirkung der Induktion, die induzierte Spannung U_L , muß nach der Lenzschen Regel so gerichtet sein, daß sie der Ursache \dot{I} entgegenwirkt. Bei einem Pluszeichen in $U_L = +L \cdot \dot{I}$ ist dies der Fall: Bei Stromfluß in Richtung von \dot{I} und damit von U_L 'verbraucht' die Spule Energie aus dem Stromkreis. Das wirkt der Zunahme \dot{I} des Stromes entgegen.

An einem einfachen Beispiel soll dies klar werden. Abb. j*1-6 zeigt einen Stromkreis, der aus einer Spule und einem Widerstand besteht. Laut Maschenregel gilt $U_L + U_R = 0$, d.h. $\dot{I} = -(R/L) \cdot I$. Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$I(t) = I_0 \exp(-(R/L)t).$$

Der Strom nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Mit einem Minuszeichen im Induktionsgesetz ergäbe sich aus der Maschenregel die Differentialgleichung $\dot{I} = +(R/L) \cdot I$ mit der Lösung

$$I(t) = I_0 \exp(+(R/L)t).$$

Das widerspräche dem Energiesatz, denn der Strom wüchse von einem kleinen durch zufällige äußere Störungen entstandenen Anfangswert I_0 beliebig weit an, wobei der Widerstand immer mehr Wärmeenergie abgäbe.

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz führt zum richtigen Ergebnis, falls man gleichzeitig $U_L = U_R$ annimmt. Dieses Vorgehen ist jedoch unschön, wird doch auf den ersten Blick betrachtet dabei die Maschenregel ignoriert. Auf den zweiten Blick läßt sich die Gleichung dadurch rechtfertigen, daß die Positivrichtungen der beiden Spannungen nicht in demselben Umlaufsinn der Masche festgelegt seien. Man muß sich darüber im Klaren sein, daß damit an der Spule nicht das Verbraucherpfilsystem angewendet wird.

Abschließend sei gesagt, daß das die in den Abschnitten 1.1 und 1.3 erläuterten Konventionen für die Richtung von Spannungspfeilen in der gesamten Studienarbeit angewandt werden, ohne dabei jedesmal auf Einzelheiten einzugehen.

2 Das Theorem von Earnshaw oder: Statisches, stabiles, freies Schweben in elektrostatischen Feldern verboten

Eine charakteristische Eigenart von Physikern ist es, möglichst einfache Erklärungen von Phänomenen zu suchen und auch experimentelle Ziele durch möglichst unaufwendige Mittel zu erreichen. Ein antikes Beispiel dafür ist die Anekdote, in der Archimedes den Ausruf ‘heureka’ tat, als ihm eine genial einfache Methode eingefallen war, den Goldgehalt der Krone des Königs Hieron II. von Syracusae zerstörungsfrei zu überprüfen.

Insofern ist es interessant, darüber nachzudenken, welches die einfachste Art und Weise ist, das Levitieren zu bewerkstelligen. Eine denkbare Anordnung wäre es, einen geladenen Körper in einem statischen elektrischen Feld schweben zu lassen. In diesem Kapitel wird erklärt, warum statisches, stabiles, freies Schweben so nicht funktionieren kann.

Man betrachte etwa eine positive Ladung inmitten einer ebenfalls positiv geladenen Kugelschale (Abb. a*2-1). Die Ladung wird jedoch keinesfalls stabil im Mittelpunkt der Kugelschale schweben, da das elektrische Feld innerhalb der gesamten Schale Null ist, falls diese homogen geladen ist.

Voraussetzung für stabiles Schweben einer Ladung in einem äußeren Feld ist neben der Kräftefreiheit an diesem Punkt die Bedingung, daß bei geringer Verrückung der Ladung weg vom Gleichgewichtspunkt Kräfte auf die Ladung wirken, die diese wieder zurück zum Ausgangspunkt zwingen. In Faradays Worten hieße dies, daß bei einer stabil levitierenden positiven Ladung alle Feldlinien des externen Feldes in der Nähe des Gleichgewichtspunktes zu diesem Punkt hinzeigen müßten (Abb. b*2-1). Da Feldlinien ausschließlich an positiven Ladungen beginnen und an negativen Ladungen enden, müßte sich dort also eine negative Ladung befinden. Folglich wäre kein Platz mehr für die schwebende positive Ladung. Falls die beiden Ladungen sich doch arrangieren können, wird man das Schweben zumindest nicht mehr als frei bezeichnen. Eine mathematische Formulierung genau dieses Gedankenganges enthält ein Zeitschriftenartikel von 1842, der im Zusammenhang mit der Levitation in elektrischen Feldern oft kurz zitiert wird als ‘Earnshaw’s Theorem’.

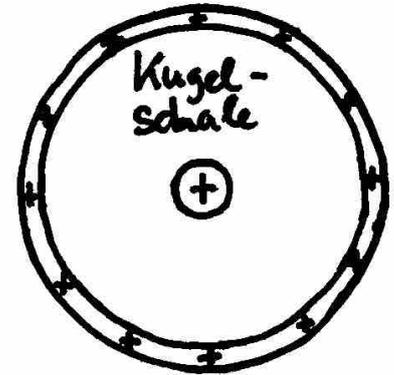


Abb. a*2-1: Schwebt die positive Ladung stabil?.

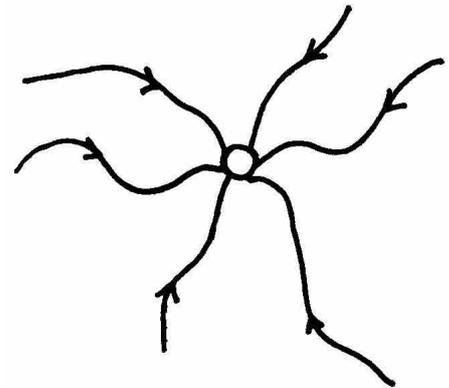


Abb. b*2-1: Feldlinienbild.

2.1 Earnshaw’s Theorem

Das Thema dieses Artikels mit dem Titel ‘On the Nature of the Molecular Forces which regulate the Constitution of the Luminiferous Ether’ [Earnshaw] ist der vor der Durchsetzung der Relativitätstheorie als Trägermedium für Lichtwellen postulierte Äther. Der Verfasser nimmt an, der Äther sei aus lauter kleinen Molekülen aufgebaut. Er untersucht, von welcher Art die intermolekularen Kräfte sein müssen, damit das gesamte Medium dazu tauglich ist, Wellen zu transportieren. Gleichbedeutend zu Letzterem ist jedoch gerade, daß jedes Äthermolekül im Feld der restlichen Äthermoleküle stabil und frei schwebt. Die für uns relevante Kernaussage des Artikels, die man auch das Theorem von Earnshaw nennen kann, besagt, daß stabiles, freies Schweben eines Äthermoleküls nicht möglich ist, falls zwischen den Molekülen nur zentrale Kräfte wirken, die proportional zum Reziproken des Abstandquadrats abfallen. Wir reproduzieren hier Earnshaws Argumentation in neuem mathematischen Formalismus und mit den heute üblichen Konventionen. Die Äthermoleküle ersetzen wir durch Punktladungen, da wir hauptsächlich an elektrostatischen Wechselwirkungen interessiert sind.

Seien Punktladungen q_i an Orten \mathbf{r}_i im Raum verteilt. Die Kraft auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{r} kann aus der potentiellen Energie

$$V(\mathbf{r}) = + \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

der Probeladungen im Feld der anderen Ladungen berechnet werden als $\mathbf{F} = - \text{grad } V$ (Abb. c*2-1).

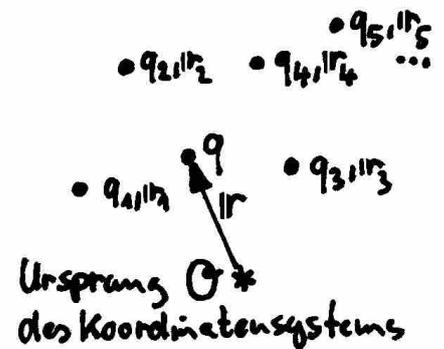
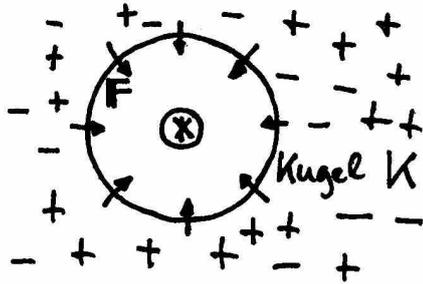


Abb. c*2-1: Probeladung q im Feld von q_1, q_2, \dots

Ann: Es ex. eine Stelle \otimes mit $\text{div } \mathbf{F} = 0$, an der eine positive Ladung frei und stabil schweben kann.

Dann würde es eine kleine Kugel K um den Punkt \otimes geben, auf deren Oberfläche die auf eine positive Ladung wirkenden Kräfte \mathbf{F} sämtlich nach innen zeigen würden. Da die Ladung frei schweben soll, kann die Kugel K so klein gewählt werden, daß überall in ihrem Innerem die Ladungsdichte Null ist, also auch $\text{div } \mathbf{F} = 0$.



Mit dem Gauß'schen Satz ergibt sich ein Widerspruch

$$\int dV \text{div } \mathbf{F} = \int dA \cdot \mathbf{F}$$

$K \parallel \sigma$ $\partial K \wedge \emptyset$
 (falls Kugel kleingew.) (da Kräfte ins Kugelinnere zeigen)

Abb. d*2-2: Beweis mit dem Satz von Gauß.

Wir nehmen an, die Probeladung schwebt frei an einem Punkt \mathbf{r}_0 . Da also keine resultierende Kraft auf sie wirkt, verschwinden die partiellen Ableitungen $\partial_x V(\mathbf{r}_0), \partial_y V(\mathbf{r}_0), \partial_z V(\mathbf{r}_0)$. Eine 3-dimensionale Taylorentwicklung des Potentials um den Punkt \mathbf{r}_0 ergibt damit

$$V(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) + 0 + \sum_{ij} \frac{1}{2} \partial_i \partial_j V(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta x_i \Delta x_j + \dots$$

Da die Matrix $\partial_i \partial_j V(\mathbf{r}_0)$ symmetrisch ist, kann durch eine Hauptachsentransformation das Koordinatensystem so gedreht werden, daß die Größen $\partial_i \partial_j V(\mathbf{r}_0)$ für $i \neq j$ zu Null werden. Dann ist

$$V(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \cong V(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \partial_x^2 V(\mathbf{r}_0) \Delta x^2 + \frac{1}{2} \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0) \Delta y^2 + \frac{1}{2} \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0) \Delta z^2.$$

Als Kraft \mathbf{F} auf die Probeladung q erhält man angenähert

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = - \text{grad}_{\Delta \mathbf{r}} V(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \cong - \begin{pmatrix} \partial_x^2 V(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta x \\ \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta y \\ \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta z \end{pmatrix}.$$

Falls eine der drei Größen $\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0), \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0), \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0)$ negativ ist, beispielsweise $\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0)$, so zeigt die Kraft bei kleiner Auslenkung der Probeladung von \mathbf{r}_0 in x -Richtung auch in Richtung der x -Achse. Die Probeladung wird von dem kräftefreien Punkt \mathbf{r}_0 weg beschleunigt – das Gleichgewicht ist labil. Ist $\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0)$ positiv, so entsteht bei geringer Verrückung der Probeladung in x -Richtung eine Rückstellkraft, die der Auslenkung entgegenwirkt – die Gleichgewichtslage ist in x -Richtung stabil.

Da am Ort \mathbf{r}_0 die frei schwebende Probeladung sitzt, ist dort kein Platz für eine felderzeugende Ladung. Also muß

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = -[\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0) + \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0) + \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0)] = 0$$

sein. Wir nehmen an, daß nicht $\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0) = \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0) = \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0) = 0$ gilt. Dann ist also mindestens eine dieser Größen negativ und damit die Gleichgewichtslage instabil.

Der Schlüsselpunkt zur Erklärung, warum in elektrostatischen Feldern kein stabiles, freies Schweben möglich ist, liegt also darin, daß $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq 0$ nur dann sein kann, wenn sich am Ort \mathbf{r} eine felderzeugende Ladung befindet. Hier wird die Parallele zur in dem einleitenden Abschnitt zu diesem Kapitel mit Hilfe des einfachen Feldlinienbildes (Abb. b*2-1) illustrierten Argumentation deutlich.

Dieselben Überlegungen wie oben ergeben sich, wenn man von dem Satz ausgeht: Eine Gleichgewichtslage ist genau dann stabil, wenn die potentielle Energie dort ein lokales Minimum aufweist. Wie in Abb. d*2-2 skizziert, kann das Earnshaw-Theorem auch durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes gezeigt werden, wobei hier der Fall $\partial_x^2 V(\mathbf{r}_0) = \partial_y^2 V(\mathbf{r}_0) = \partial_z^2 V(\mathbf{r}_0) = 0$ inbegriffen ist (siehe auch Internet-Seite [Gibbs, Geim]).

Damit ist das Theorem von Earnshaw für elektrostatische Kräfte gezeigt. Daß es auch für Gravitationskräfte in Kombination mit elektrostatischen Kräften gilt, kann man jetzt leicht verstehen. Die Punktladungen q_i an Orten \mathbf{r}_i sollen zusätzlich eine Masse m_i besitzen, genauso die Probeladung q eine Masse m . Die gesamte potentielle Energie ist $V(\mathbf{r}) = + \sum_i (\frac{q}{4\pi\epsilon_0} q_i - Gm \cdot m_i) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$, und $\mathbf{F} = - \text{grad } V$ gilt weiterhin. Da beide Kräfte antiproportional zum Abstandsquadrat abfallen, gilt $\text{div } \mathbf{F} = 0$ überall, wo sich kein felderzeugendes Punktteilchen befindet, und die Argumentation läuft wie vorhin weiter.

2.2 Ausgedehnte, geladene, starre Körper

Prinzipiell wäre es denkbar, daß zwar eine einzelne Punktladung nicht statisch, stabil und frei in einem elektrostatischen Feld schweben kann, wohl aber eine Ansammlung von starr miteinander verbundenen Punktladungen. Unter einem

geladenen, starren Körper wollen wir nichts anderes als solch eine Konglomeration verstehen.

Die Bedingung, daß das Schweben statisch ist, hat im vorigen Abschnitt bei der Betrachtung eines Punktteilchens keine weiteren Einschränkungen bewirkt. Die Voraussetzung des Schwebens eines Körpers impliziert, daß der Körper in dem jeweiligen Bezugssystem an einem Ort im Raum bleibt. In einem Bezugssystem schwebende Punktteilchen ruhen also zwangsläufig an einem Ort dieses Bezugssystems. Ausgedehnte Körper können jedoch Drehungen ausführen und dabei trotzdem in einem abgegrenzten Bereich des Raumes bleiben. Die Vorbedingung des statischen Schwebens von ausgedehnten Körpern beinhaltet, daß der Körper keine Drehungen ausführt.

Seien q_i Punktladungen eines geladenen, starren Körpers, die jeweils eine potentielle Energie $V_i(\mathbf{r})$ in einem äußeren statischen, elektrischen Feld haben. Wir nehmen an, der geladene starre Körper ruhe in einer stabilen, freien Schwebeposition, wenn sich seine Ladungen q_i an Orten \mathbf{r}_i befinden (Abb. e*2-3). Wenn man den Körper, d.h. alle seine Ladungen, aus der Ruhelage um einen Vektor $\Delta\mathbf{r}$ verschiebt, beträgt seine potentielle Energie $U(\Delta\mathbf{r})$ im äußeren Feld

$$U(\Delta\mathbf{r}) = \sum_i V_i(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}).$$

Die auf den Körper wirkende Gesamtkraft $\mathbf{F}(\Delta\mathbf{r})$ ergibt sich als Summe der Kräfte, die aufgrund des äußeren Feldes auf alle seine Ladungen wirken

$$\mathbf{F}(\Delta\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}) = \sum_i -\text{grad } V_i(\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\Delta\mathbf{r}).$$

Die Kräfte zwischen den einzelnen Ladungen des Körpers brauchen hierbei nicht berücksichtigt zu werden, denn sie annullieren sich insgesamt. (Man kann sich nicht wie Münchhausen an den eigenen Haaren aus dem Sumpf ziehen.)

Die Argumentation dafür, daß die Schwebeposition nicht stabil sein kann, läuft nun analog zum Fall einer einzelnen Ladung, nur daß an die Stelle des Potentials $V(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r})$ der Punktladung das Gesamtpotential $U(\Delta\mathbf{r})$ tritt. Der Schlüsselpunkt ist der gleiche, nämlich

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \sum_i \text{div } \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i + \mathbf{0}) = 0. \quad (\text{A}\cdot\text{2}\cdot\text{3})$$

Da nämlich der starre Körper sich nach Annahme frei im Raum befindet, muß an den Orten \mathbf{r}_i aller seiner Punktladungen die äußere Ladungsdichte Null sein. Daher verschwinden in (A·2·3) alle Summanden $\text{div } \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i + \mathbf{0})$. Ausgehend von $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{0}) = 0$ argumentiert man nun wie im vorigen Abschnitt weiter mit Hilfe einer Taylorentwicklung der potentiellen Energie $U(\Delta\mathbf{r})$ des starren Körpers oder man benutzt den Satz von Gauß. Bei letzterem Weg hätte man darauf verzichten können zu zeigen, daß das Kraftfeld des starren Körpers ein Gradientenfeld ist.

Nun ist also gezeigt, daß auch für geladene, starre Körper ein statisches, stabiles, freies Schweben in einem elektrostatischen Feld unmöglich ist. Nach dem im letzten Absatz des vorigen Abschnitts 2.1 Gesagten ist dies auch dann nicht möglich, wenn zusätzlich ein Gravitationsfeld vorhanden ist und die Punktladungen Massen besitzen.

Um von einem stabilen Gleichgewicht des Körpers sprechen zu können, wäre neben der Translationsstabilität Stabilität bezüglich Drehungen des Körpers notwendig. Dieses Thema soll uns hier nicht weiter beschäftigen, da schon die translatorische Stabilität nicht hergestellt werden kann.

2.3 Einfluß von Polarisation; Levitation in statischen magnetischen Feldern

Reale ausgedehnte Körper haben eine Eigenschaft, die bisher noch nicht besprochen wurde – sie sind polarisierbar. Verschiebt man einen polarisierbaren Körper

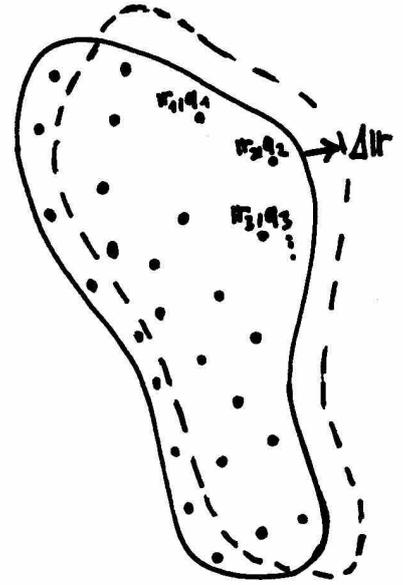


Abb. e*2-3: Geladener, starrer Körper.

in einem äußeren statischen elektrischen Feld, so verändert sich die Ladungsverteilung in ihm. Der Körper kann nicht als die im vorigen Abschnitt behandelte Ansammlung von starr miteinander verbundenen Ladungen aufgefaßt werden. Ob dadurch stabiles Schweben möglich wird, muß neu untersucht werden.

Unter anderem mit dieser Fragestellung beschäftigt sich ein 1939 in der Zeitschrift für Physik erschienener Artikel von Werner Braunbeck [Braunbeck]. Diese ausführliche Untersuchung über Möglichkeiten bzw. Unmöglichkeiten des stabilen Schwebens von Körpern in statischen elektrischen und magnetischen Feldern behandelt außerdem den Einfluß der Elastizität, leitender Materialien, zeitlich konstanter Ströme und das Verhalten von Para-, Dia- und Ferromagnetica. Das Ergebnis wird am Ende des Artikel durch das folgende Fazit zusammengefaßt:

‘Ein statisches, stabiles, freies Schweben eines Systems I im elektrischen, magnetischen und Schwerefeld eines anderen Systems II ist unmöglich, solange nicht in mindestens einem der beiden Systeme diamagnetische Materie vorhanden ist.’

Supraleiter sind dabei als ideale Diamagneten aufzufassen. Das Schweben eines Supraleiters über einem Permanentmagneten oder eines Permanentmagneten über einer supraleitenden Wanne gehört zu den verblüffendsten Demonstrationsexperimenten mit diesem eigenartigen Zustand von Materie. Einen Permanentmagneten durch geschickte Anordnung anderer Permanentmagneten statisch zum stabilen, freien Levitieren zu bringen, ist jedoch nach W. Braunbecks Aussage unmöglich.

3 Apparaturen zum Schweben von Körpern in elektromagnetischen Feldern, Anwendungen

Obwohl durch das Theorem von Earnshaw in seiner durch Braunbeck verallgemeinerten Form klar wird, daß Levitationsversuche von Körpern in elektromagnetischen Feldern unter recht umfassenden Voraussetzungen zum Scheitern verurteilt sind, gibt es doch Anordnungen, die erfolgreich sind. Das Geheimnis ihres Erfolges liegt ganz einfach darin, nicht die Voraussetzungen des Earnshaw-Theorems zu erfüllen. In diesem Kapitel werden kurz diejenigen nach Prinzipien der Elektrodynamik funktionierenden Schwebeapparaturen angesprochen, die nicht in den beiden folgenden Kapiteln ausführlich untersucht werden.

Eine Reihe von Schwebeanordnungen lassen sich mit Hilfe der Regeltechnik verwirklichen. Dazu gehört auch die in der Einleitung erwähnte, unter einem Elektromagneten schwebende Kugel im Deutschen Museum. (Mittlerweile gibt es im Spektrum-Club eine kleine Version dieses Apparates zu kaufen, bei der die schwebende Kugel von ca. 2 cm Durchmesser als Reflektor für eine Halogenlampe dient. Diese Hohlkugel besteht jedoch hier nicht aus ferromagnetischem Material, sondern aus Kunststoff und enthält in ihrem Inneren, befestigt an einer Stelle ihrer Innenwand, einen kleinen Permanentmagneten.) Der Elektromagnet wird über eine Lichtschranke gesteuert, die auf die Position der Kugel reagiert. Die Voraussetzungen des verallgemeinerten Earnshaw-Theorems werden hier dadurch verletzt, daß die auftretenden elektromagnetischen Felder sich zeitlich verändern.

Abgesehen von Systemen, die Körper durch Prozesse der Regulation am Schweben halten, existieren auch elektrodynamisch funktionierende Vorrichtungen, bei denen die Stabilität durch die Konzeption der Apparatur sichergestellt wird und nicht durch zusätzliche elektronische Bauteile erzwungen werden muß. Zwei Apparaturen dieser Art werden im Buch [Laithwaite1] vorgestellt, der Kugel-Levitator (S. 190–192) und der Kreisscheiben-Levitator (S. 195–197) (Bauanleitungen auf den Seiten 204–206). Der Kugel-Levitator ist auf dem Deckblatt dieser Studienarbeit zu sehen. Bei beiden Geräten schweben metallische Körper über einer Anordnung von konzentrischen, zum Teil durch Eisenbleche voneinander getrennte Spulen, die von Wechselstrom durchflossen werden. In den schwebenden Körpern werden Ströme induziert, auf die Lorentzkräfte im Magnetfeld der Spulen wirken. Die schwebenden Körper sind eine dünnwandige Aluminium-Hohlkugel bzw. eine Aluminium-Kreisscheibe. Beide Apparaturen ähneln sehr der im Kapitel 5 der Studienarbeit behandelten Thomson-Ring-Apparatur – mit dem Unterschied, daß bei der Thomson-Ring-Apparatur kein freies, stabiles Schweben möglich ist, wohl aber bei den beiden obengenannten Apparaten.

Als Anwendungen des Schwebens von Körpern in elektromagnetischen Feldern sind mir zwei industriell brauchbare Ideen bekannt.

Erstens werden magnetisch berührungsfrei gelagerte Achsen seit einiger Zeit dort benutzt, wo extrem große Drehfrequenzen benötigt werden: z.B. bei Turbomolekularpumpen. (Als Hersteller magnetisch gelagerter Turbomolekularpumpen ist mir die Firma Pfeiffer bekannt; online im Internet: URL: <http://www.pfeiffer-vakuum.de> [Stand Januar 1999].) Im Artikel [Rossing, Hull] werden drei Funktionsprinzipien der magnetischen Lagerung genannt:

- geregelte Systeme von Spulen, die mit Gleichstrom beschickt werden
- Stabilisierung durch Induktion von Wirbelströmen
- Lager, die aus Typ-I-Supraleitern und Permanentmagneten bestehen.

Zweitens sind die in letzter Zeit kontrovers diskutierte Magnetschwebbahnen wahrscheinlich den meisten ein Begriff. Deren Schwebevorrichtungen funktionieren nach zwei verschiedenen Grundprinzipien, dem elektromagnetischen Schweben (EMS) und dem elektrodynamischen Schweben (EDS).

Beim elektromagnetischen System üben am Fahrzeug angebrachte Elektromagnete eine starke Anziehungskraft auf die ferromagnetischen Schienen aus. Da die Elektromagnete unter die Fahrbahnschiene greifen, beispielsweise unter

EMS

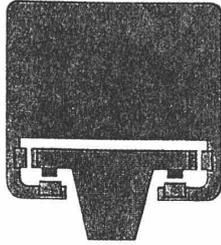
anziehendes Prinzip,
magnetische Kräfte

Abb. a*3-2: .

EDS

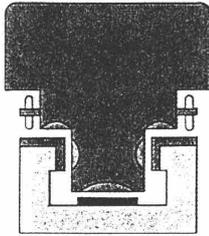
Antrieb im Fahrweg,
abstoßendes Prinzip

Abb. b*3-2: .

Abb. c*3-2: Permanentmagnetisches
Schweben (aus [Jung]).

den Rand einer T-förmigen Schiene, wird das Fahrzeug angehoben (Abb. a*3-2, kopiert aus [Technik, S. 65]). Die Schwebehöhe beträgt etwa 1 cm. Prinzipiell ist die Anordnung instabil, sie wird jedoch durch Regeltechnik stabilisiert. Sensoren messen die Abstände zwischen Fahrzeug und Schiene und nehmen Einfluß auf den durch die Elektromagneten fließenden Strom. Zum Antrieb werden Linearmotoren verwendet. Bei Stillstand ruht das Fahrzeug auf Kufen; Räder sind überflüssig. In Deutschland konzentrierte sich die Forschung seit 1977 auf dieses unter dem Namen Transrapid bekannte System.

Das elektrodynamische Schweben kommt im Gegensatz zum elektromagnetischen Schweben prinzipiell ohne stabilisierende Regelung aus – die Anordnung ist selbststabilisierend. Die für das Schweben notwendige, aufwärtsgerichtete Kraft wird durch an der Fahrzeugunterseite angebrachte starke Magneten erzeugt, die durch ihre Bewegung im trogförmigen, metallischen Fahrweg Wirbelströme induzieren (Abb. b*3-2, kopiert aus [Technik, S. 65]). Bei ausreichender Geschwindigkeit der Bahn sind die zwischen den Wirbelströmen und den Magneten wirkenden Kräfte abstoßend. Das Fahrzeug schwebt etwa 10 cm über dem Fahrweg. Zum Anfahren und Abbremsen muß das Gefährt auf Rädern rollen. Die notwendigen Feldstärken der Magnete werden durch supraleitende Spulen erreicht. Das elektrodynamische System wird hauptsächlich in Japan erprobt.

Prinzipiell ist ein drittes System denkbar, um Magnetschwebebahnen zu bauen, das permanentmagnetische Schweben (PMS). Die aufwärtsgerichtete Kraft wird dabei allein durch Abstoßung zwischen Permanentmagneten erreicht. Einen Permanentmagneten durch geschickte Anordnung anderer Permanentmagneten statisch zum stabilen Levitieren zu bringen, ist jedoch nach dem Artikel [Braunbeck] unmöglich. Wenn sich die Bahn auch in Fahrtrichtung bewegt, ist trotzdem auf geraden Schienenstücken in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene die Situation quasistatisch. Deshalb ist bei diesem System eine mechanische oder elektromagnetische, seitliche Stabilisierung notwendig ([Jung, Abb. 2.11], hier wiedergegeben als Abb. c*3-2). Das Prinzip hat beim Bau von Magnetschwebebahnen noch keine technische Bedeutung erlangt [Brockhaus, Stichwort Magnetschwebebahn].

Die Grundlagen über Magnetschwebebahnen wurden der Literatur [Technik, S. 64/65], [Brockhaus, Stichwort Magnetschwebebahn], [Meyers Lexikon, Stichwort Magnetschwebebahnen] und last but not least [Rossing, Hull] entnommen.

4 Der schwebende magnetische Kreisel

Seit einiger Zeit ist in Spielwaren-, Wissenschafts-, Drachen- und Jonglierläden ein von Roy Harrigan entdecktes und von William Hones weiterentwickeltes und vermarktetes faszinierendes Spielzeug zu sehen – der schwebende Kreisel Levitron. (In den USA seit Anfang 1994 auf dem Markt [Ucke, Schlichting]). Die folgende Beschreibung bezieht sich auf ein Nachfolger-Modell, den Super-Levitron, bei welchem der Kreisel dank neuartiger Neodym-Eisen-Bor-Magnete etwa doppelt so hoch schwebt wie bei seinem Vorgänger. Die Hauptbestandteile sind ein Kreisel mit einem parallel zu seiner Achse magnetisiertem Schwungrad und eine sich in einem Kunststoffkästchen befindende, stark, senkrecht zu ihrer Oberfläche magnetisierte, quadratische Platte (Abb. a*4-1). Die Magnetisierung der Platte ist beim Super-Levitron rotationssymmetrisch zur Senkrechten durch die Plattenmitte, wobei weiter außen ein ringförmiger Bereich sehr starker Magnetisierung liegt, während der zentrale Bereich der Platte entweder nur leicht, gar nicht oder sogar entgegengesetzt magnetisiert wurde. Messungen mit einer Hall-Sonde ergaben auf der Oberfläche des Kunststoffkästchens maximale Magnetfeldstärken von 1020 Gauß jeweils in der Nähe der vier Ecken der Platte und in der Mitte der Platte eine Feldstärke von -600 Gauß, was bedeutet, daß das Magnetfeld hier in entgegengesetzte Richtung zeigte. Beide Permanentmagnete bestehen aus Keramik-Material (Neodym-Eisen-Bor), das erstens sehr starke Magnetisierungen zuläßt und zweitens Wirbelströme verhindert, da es nichtleitend ist.

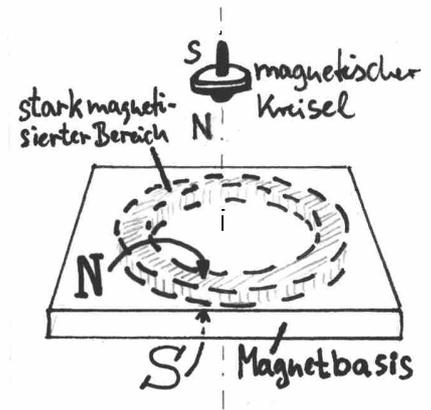


Abb. a*4-1: Der Levitron.

4.1 Schwebeanleitung und Beobachtungen

Zum Schweben bringt man den Kreisel folgendermaßen (Photoanhang, Photos 1–3). Zuerst dreht man ihn auf einer zum Lieferumfang gehörenden durchsichtigen Plastikhaube an, die in ihrer Mitte eine kreisförmige Mulde hat und mit ihrer Unterseite genau passend auf das die quadratische Magnetplatte enthaltende Kunststoffkästchen gesteckt werden kann (Photo 1). Das Kunststoffkästchen steht dabei auf einer festen Unterlage, z.B. einem Tisch. War die dem Kreisel übermittelte Drehfrequenz groß genug, so nimmt man die Plastikhaube und bewegt sie zusammen mit dem Kreisel langsam nach oben. Während der Aufwärtsbewegung wird der Kreisel scheinbar immer leichter, bis zu einem Punkt, wo der Kreisel von der Plastikhaube abhebt und – wenn alles gut geht – etwa 7 cm über dem Kunststoffkästchen schwebend bleibt. Die Plastikhaube kann jetzt entfernt werden (Photo 2).

Beim Vorgang des Hochhebens ist einige Geschicklichkeit notwendig, und es gibt einige Tricks, durch die man den Kreisel zu einem schwingungsarmen Levitieren bringen kann. Verhält sich der Kreisel schon auf der Plastikhaube von Anfang an unruhig und eiert im Kreis herum – was besonders bei durch häufigen Gebrauch zerkratzten Hauben und Kreiselunterseiten passiert – so hilft es, die Plastikhaube leicht gegen die horizontale Ebene anzuwinkeln und auch eventuell seitlich etwas von der zentralen Position weg zu bewegen. Auch bei nicht zerkratzten Hauben ist dieses Vorgehen sinnvoll. Es ist de facto die einzige Möglichkeit, auf die horizontale Position des Kreisels Einfluß zu nehmen. Bei anfänglich starken senkrechten Schwingungen des gerade schwebenden Kreisels kann man versuchen, ihn während der Abwärtsbewegung möglichst im Mittelpunkt der Schwingung mit der Plastikhaube von unten anzutippen. Wenn man Glück hat, oszilliert der Kreisel danach weniger. Ausschlaggebend dafür, wie sehr der Kreisel nach dem Abheben in vertikaler Richtung schwingt, ist besonders dessen Gewicht. Mit Hilfe von zum Zubehör gehörenden Unterlegscheiben mit unterschiedlichen Massen (Photo 3) sollte der Kreisel möglichst schwer gemacht werden – so schwer, daß ein Schweben gerade noch möglich ist. Da der Magnetismus der Permanentmagneten ziemlich stark temperaturabhängig ist, muß der Kreisel von Zeit zu Zeit neu austariert werden. Insbesondere ist das fast immer dann nötig, wenn der Kreisel in einer neuen Umgebung gestartet wird. Durch dem Gerät beigelegte Plastikkeile kann außerdem die Basis-Magnetplatte möglichst genau waagrecht eingestellt werden (Photo 3). Sie werden an den Seiten unter das Kunststoffgehäuse geschoben, nach welchen der Kreisel be-

vorzugt abstürzt, und je nach Verlauf der weiteren Schweberversuche feinjustiert.

Bei stabil schwebendem Kreisel kann man mehrere Arten von Bewegungen beobachten. Zunächst einmal dreht sich dieser, wie es bei Kreiseln üblich ist, um seine Figurenachse. Dazu kommen Schwingungen des Schwerpunkts in der Horizontalen und in vertikaler Richtung. Die horizontale Schwingung kann von linear über elliptisch bis zu kreisförmig aussehen. Da die vertikale Schwingung mit einer anderen Frequenz abläuft, entsteht insgesamt keine räumliche elliptische Oszillation, sondern ein Lissajoufiguren-artiges Gebilde. Generell zu sehen sind außerdem Präzessionen der Kreiselachse als Folge der vom äußeren Magnetfeld verursachten Drehmomente, erkennbar an einem kreisförmigen 'Wabbeln' (von engl. 'to wobble') der Spitze des Kreiselstiels mit meist sehr kleinem Radius. Zu Beginn des Schwebens starke Präzessionsbewegungen werden mit der Zeit immer kleiner – verschwinden jedoch nie völlig. Dieser Vorgang entspricht dem Vorgang des sich Aufrichtens der Figurenachse von herkömmlichen Kreiseln auf dem Boden bei anfänglicher Schräglage. Bezüglich der Stabilität des Kreisels habe ich die Vermutung, daß dieser bei anfänglich besonders großen Präzessionen sogar besonders lange schweben kann. Im Zusammenhang mit der Kreiselpräzession steht ein Phänomen, das der Schlüsselpunkt für die laterale Stabilität des Kreisels ist: Die über eine Präzessionsrunde gemittelte Lage der Kreiselachse bleibt während der seitlichen Schwingungen des Kreisels nicht starr senkrecht im Raum stehen. Der Stiel des Kreisels neigt sich jeweils leicht mit in diejenige Richtung, in welche der Kreisel von der zentralen Ruhelage ausgelenkt ist. Es sieht aus, als ob der Kreisel auf seiner sich auch in Bereiche außerhalb des Kreisels erstreckenden Figurenachse an einem Punkt etwas unterhalb seines unteren Endes festgehalten würde. Dieses Mitwippen der Kreiselachse ist von der Seite aus gesehen deutlich erkennbar.

Neben der Kreiselpräzession in Folge von am Kreisel angreifenden äußeren Drehmomenten gibt es prinzipiell eine klar von der Präzession zu trennende Bewegungsart – die Nutation. Nutationen treten bei symmetrischen Kreiseln immer dann auf, wenn die momentane Drehachse nicht die Figurenachse ist. Während der Anfangsphase des Schwebens vom Levitron kann man mit bloßem Auge keine Nutationen beobachten. In Wirklichkeit ist immer dann, wenn Präzessionen auftreten, auch eine kleine Nutationsbewegung mit im Spiel, denn die Winkelgeschwindigkeit der Präzession trägt immer einen nicht in Richtung der Figurenachse des Kreisels zeigenden Anteil zu dessen gesamter Winkelgeschwindigkeit bei. Zu Beginn des Schwebens ist diese winzige Nutationsbewegung jedoch nicht von der Präzession zu trennen. Gegen Ende des Levitierens wird mit abnehmender Drehfrequenz des Kreisels die Nutation immer stärker. Dies erkennt man daran, daß die Spitze des Kreiselstiels von oben betrachtet verschwommen erscheint (Abb. b*4-2). Durch Nutationen wird der Absturz des Kreisels eingeleitet. Während die Nutationsbewegungen mehr und mehr eskalieren, wird der Winkel zwischen Kreiselachse und der Senkrechten immer größer. Dadurch sinkt die nach oben gerichtete Kraft auf den Kreisdipol im Feld des Basis-Magneten so weit ab, bis sie nicht mehr ausreicht, seine Schwerkraft zu kompensieren. Es folgt eine Bruchlandung. Ich habe dabei nie beobachtet, daß der Kreisel sich schon in der Luft um annähernd 180 Grad umgedreht hätte, es reichten immer weniger als 90 Grad Seitlage, um einen Absturz hervorzurufen.

Ein Flug kann ohne besondere Zusatzmaßnahmen bis zu über 3 Minuten dauern. Begrenzender Faktor ist zum einen die Reibung an der Luft. Zum anderen ist vorstellbar, daß in den zum Zubehör gehörenden Messing-Unterlegscheiben, die zur Austarierung des Kreisels auf dessen Achse gesteckt werden, Wirbelströme induziert werden, die beim Abbremsen eine Rolle spielen.

4.2 Wie funktioniert der Levitron?

Die hinter dem Levitron stehende Ursprungsidee ist es, einen magnetischen Dipol im Feld eines anderen, größeren Dipols schweben zu lassen. Die dafür notwendige aufwärts gerichtete Kraft auf den oberen Dipol entsteht durch Abstoßung der benachbarten gleichnamigen Pole (etwa zweier Nordpole wie in Abb. c*4-2). Als erstes stößt man bei der Durchführung dieser Idee auf das Hindernis, daß der obere Permanent-Magnet natürlich umkippt, sobald er auch nur einen

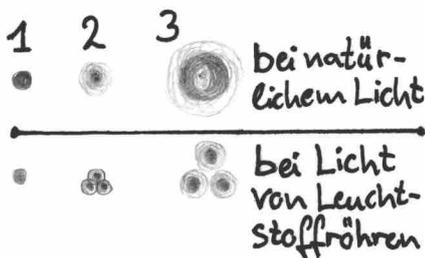


Abb. b*4-2: Nutationen der Spitze des Kreiselstiels.

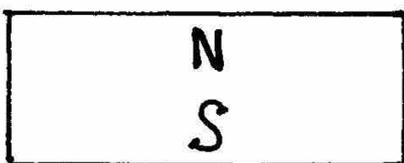


Abb. c*4-2: Abstoßung zweier Dipole.

Deut schräg zur Senkrechten gerät. Auf der Hand liegt es, den oberen Magneten durch ein zusätzliches Gewicht an dessen Unterseite so weit zu beschweren, daß ein Umkippen verhindert wird (Abb. d*4-3). Interessanterweise führt dieser Weg letztlich zu keiner funktionierenden Apparatur, denn man kommt in Konflikt mit dem Theorem von Earnshaw in seiner verallgemeinerten Form (siehe Kapitel 2). Umso erstaunlicher ist es, daß eine zunächst unnötig kompliziert erscheinende Idee des Entdeckers Roy Harrigan Erfolg hat: Das von Kreiselkompassen bekannte Verhalten schnell rotierender symmetrischer Kreisel, die Richtung ihrer Achse im Raum möglichst beizubehalten, soll den oberen magnetischen Dipol vor dem Umkippen schützen.

Um hinter die Funktionsweise des Levitrons zu kommen, ist es hilfreich zu überlegen, woran es liegt, daß das Kreisel-Konzept im Gegensatz zu dem in Abb. d*4-3 dargestellten Aufbau funktioniert. Eine bisher noch nicht angesprochene elementare Grundvoraussetzung für dauerhaftes Schweben ist die seitliche Stabilität des Kreisels.

4.3 Seitliche Stabilität des oberen Dipols

In einem inhomogenen äußeren Magnetfeld \mathbf{B} wirkt auf einen magnetischen Punktdipol mit dem Dipolmoment \mathbf{m} eine Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \text{grad } \mathbf{B} = m_x \partial_x \mathbf{B} + m_y \partial_y \mathbf{B} + m_z \partial_z \mathbf{B}.$$

Bildlich gesprochen zeigt das Dipolmoment eines Permanentmagneten von dessen Südpol zu dessen Nordpol (Abb. e*4-3). Falls bei uns der obere Dipol senkrecht ausgerichtet ist – wie beim Levitron zu erwarten –, wir also $\mathbf{m} = (0, 0, -\mu)$ annehmen können mit $\mu > 0$, heißt das

$$\mathbf{F} = -\mu \cdot \partial_z \mathbf{B}. \quad (\text{A.4-3})$$

Die für die vertikale Stabilität relevante Bedingung

$$\partial_z F_z < 0$$

ist leicht zu erfüllen. (Die als konstant betrachtete Schwerkraft spielt bei den Stabilitätsbetrachtungen keine Rolle, die sorgt nur für Kräftefreiheit in der Ruhelage des Kreisels.) Für horizontale Stabilität sind erforderlich

$$\begin{aligned} \partial_x F_x &< 0, \\ \partial_y F_y &< 0. \end{aligned}$$

Nun folgt jedoch aus $\text{div } \mathbf{B} = 0$, daß

$$\text{div } \mathbf{F} = -\mu(\partial_x \partial_z B_x + \partial_y \partial_z B_y + \partial_z \partial_z B_z) = -\mu \partial_z (\text{div } \mathbf{B}) = 0. \quad (\text{B.4-3})$$

Daher kann es unter den bisher genannten Voraussetzungen nie Stabilität in alle drei Raumrichtungen gleichzeitig geben. Dies ist eine Verallgemeinerung des Earnshaw-Theorems der Elektrostatik für magnetische Punktdipole in statischen Magnetfeldern. Sie ist auch in dem in Kapitel 2 wiedergegebenen Resümee des Artikels [Braunbeck] enthalten.

Wie in aller Welt schafft es der Levitron, trotzdem stabil und frei zu schweben? Der Kreisel verletzt die Voraussetzungen des verallgemeinerten Earnshaw-Theorems darin, daß sein Schweben nicht statisch ist. Er dreht sich um seine Figurenachse und führt daneben noch Präzessionsbewegungen und Nutationsbewegungen aus. Sein spezielles Geheimnis liegt in dem schon bei den Beobachtungen beschriebenen Mitwippen der Kreiselachse bei waagerechten Schwingungen. Verursacht wird diese Wippbewegung durch die Kreiselpräzession. Diese verläuft nämlich so, daß die Kreiselachse ständig um die aktuelle Richtung des magnetischen Feldes am Ort des Kreisels präzediert. Der Kreisel richtet sich sozusagen an den lokalen Magnetfeldlinien aus. Genauer gesagt bleibt die sogenannte adiabatische Invariante $\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ annähernd erhalten (vergl. [Berry, Abschnitt 2]). Bei konstanter Norm des Drehimpulses \mathbf{L} heißt das, der Winkel α zwischen der bei schnellem Kreisel ungefähr in Richtung von \mathbf{L} zeigenden Figurenachse und der Richtung des Magnetfeldes am Ort des Kreisels ändert sich kaum. Der

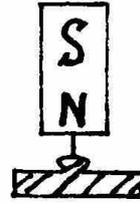


Abb. d*4-3: Stabilisierungsversuch.

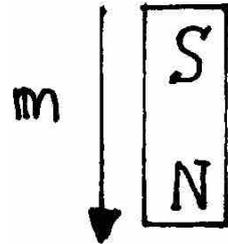


Abb. e*4-3: Magnetisches Dipolmoment.

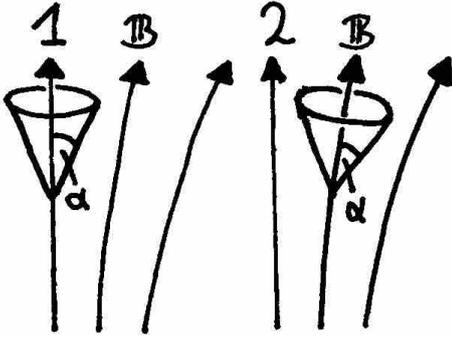


Abb. f*4-4: Mitwippen des Präzessionskegels.

momentane Präzessionskegel liegt bei ausreichender Präzessionsfrequenz immer rotationssymmetrisch zur jeweiligen Richtung des magnetischen Feldes und sein Öffnungswinkel α bleibt fast konstant (Abb. f*4-4).

Ist die Präzession im Vergleich zu den Schwingungen des Kreiselstumpfes schnell genug und der Öffnungswinkel α des Präzessionskegels recht klein, so ist es sinnvoll, für die Achse des Kreisels jeweils deren über eine Präzessionsrunde gemittelte Lage anzunehmen – also die der Achse des Präzessionskegels, die annähernd in Richtung des lokalen magnetischen Feldes zeigt. Wenn wir das Koordinatensystem zum Zeitpunkt der Beobachtung so legen, daß sich der Kreisel in der x-y-Ebene befindet und zwar im Bereich nicht-negativer x-Werte, so wird das gemittelte Dipolmoment $\bar{\mathbf{m}} = (-\xi, 0, -\zeta)$ mit $\xi, \zeta \geq 0$ und damit

$$F_{x(\text{schief})} = -\xi \partial_x B_x - \zeta \partial_z B_x.$$

Ab jetzt soll die Kraft aus Gleichung (A.4-3) mit $\mathbf{F}_{(\text{gerade})}$, die auf einen schräg liegenden Dipol mit $\mathbf{F}_{(\text{schief})}$ bezeichnet werden. Von den zwei Summanden

$$\begin{aligned} F_{x(\text{schief})1} &:= -\xi \partial_x B_x, \\ F_{x(\text{schief})2} &:= -\zeta \partial_z B_x = \frac{\zeta}{\mu} F_{x(\text{gerade})} \end{aligned}$$

ist der erste neu, der zweite proportional zur x-Komponente der schon aus (A.4-3) bekannten Kraft auf einen senkrecht stehenden Dipol. Dabei ist $F_{x(\text{gerade})}$ die Kraft auf einen Dipol mit dem Gesamtdipolmoment μ und $F_{x(\text{schief})}$ die Kraft auf einen Dipol des Gesamtdipolmoments $\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$.

Auf der senkrechten Symmetrieachse des Basismagneten ist $B_x = 0$ und damit

$$F_{x(\text{schief})2} = 0.$$

Wegen Gleichung (B.4-3) und $\partial_x F_{x(\text{gerade})} = \partial_y F_{y(\text{gerade})}$ auf der Achse ist dort

$$\partial_x F_{x(\text{schief})2} = \frac{\zeta}{\mu} \partial_x F_{x(\text{gerade})} = \frac{\zeta}{\mu} \left(-\frac{1}{2} \partial_z F_{z(\text{gerade})} \right) \stackrel{(*)}{>} 0. \quad (\text{C.4-4})$$

An der Stelle (*) wurde dabei $\partial_z F_{z(\text{gerade})} < 0$ angenommen. Dies ist plausibel, da die Lage des Kreisels beim Levitron in vertikaler Richtung stabil ist. Die Annahme ist jedoch nicht zwingend notwendig, da $\partial_z F_{z(\text{schief})} \neq \partial_z F_{z(\text{gerade})}$ ist. Beim Levitron ist die Annahme jedoch erfüllt, da der Kreisel auch bei erzwungener, ständig vertikaler Ausrichtung in die Senkrechte Stabilität aufweist. Überprüfen kann man dies, indem man den Kreisel zentral über der Magnetbasis senkrecht einschient. Die Möglichkeit, zu diesem Zweck zwei Strohalme von gering unterschiedlichem Durchmesser zu verwenden, von denen der dünnere auf den Stiel des Kreisels gesteckt wird, ist in [Ucke, Schlichting] beschrieben.

Obige für alle Punkte der Symmetrieachse der Magnetbasis geltende Ungleichung (C.4-4) bedeutet, daß der Anteil $F_{x(\text{schief})2}$ seitlich instabilisierend auf den Kreisel einwirkt, denn sie impliziert, daß in naher Umgebung der Achse die Kraft $F_{x(\text{schief})2}$ von der Achse wegzeigt.

Welchen Einfluß hat nun der Anteil $F_{x(\text{schief})1}$ auf den Kreisel in Achsennähe – etwa in Situation 2 der Abb. f*4-4? Wegen der Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes und der Symmetrie der Magnetbasis ist

$$F_{x(\text{schief})1} = -\xi = +\frac{\xi}{2} \partial_z B_z.$$

Direkt auf der Achse auf der Schwebhöhe des Kreisels ist

$$F_{z(\text{gerade})} = -\mu \partial_z B_z > 0.$$

Das kann man spüren, wenn man den Kreisel senkrecht in Schwebhöhe über die Magnetbasis hält: Der Kreisel erscheint schwerelos, denn die Kraft $F_{z(\text{gerade})}$ kompensiert das Kreiselgewicht. Wenn der Kreisel wie im Bereich positiver x-Werte leicht nach rechts geneigt ist, ergibt sich auf der Symmetrieachse der Magnetbasis die Ungleichung

$$F_{x(\text{schief})1} < 0.$$

Da diese Ungleichung wegen der Stetigkeit von $F_{x(\text{schief})1}$ auch in unmittelbarer Nähe der Achse gilt, also etwa in Position 2 der Abb. f*4-4, ist klar, daß der

Anteil einen seitlich stabilisierenden Effekt auf den Kreisel hat. Da der Kreisel beim Levitron wirklich stabil schwebt, ist zu vermuten, daß der Summand F_{x1} den destabilisierenden Einfluß von F_{x2} überkompensiert.

Im Artikel [Berry] wird als Bedingung für die Stabilität des magnetischen Kreisel-Dipols angegeben, daß die aus der Gravitationsenergie und der magnetischen Drehenergie des Dipols sich zusammensetzende Gesamtenergie

$$E = mgz - \overline{\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}}$$

minimal ist. Dabei wird die Drehenergie $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ des Dipols über eine Präzessionsrunde gemittelt.

Für die Gültigkeit beider Theorien ist es entscheidend, ob die für die Kreiselachse angenommene, über eine Präzessionsrunde gemittelte Lage eine sinnvolle Näherung ist. Dies ist bei zu hohen Frequenzen der Eigenumdrehung des Kreisels nicht mehr der Fall, da die Präzession dann im Vergleich zu den Schwerpunktschwingungen des Kreisels zu langsam abläuft. Dem Kreisel bleibt nicht genug Zeit, die lokale Magnetfeldrichtung schnell genug durch Präzession zu umrunden. Nach [Jones et al.] sollte der Levitron bei hohen Frequenzen nahezu starr in vertikale Richtung ausgerichtet bleiben und müßte also nach Gleichung (B-4-3) in einer instabilen Lage sein. Und wirklich beobachtet man auch bei zu hohen Drehfrequenzen seitliche Instabilität ([Simon et al.], [Jones et al.], [Berry]). Der Frequenzbereich, in dem der Kreisel stabil ist, erstreckt sich beim Levitron etwa von 18 bis 40 Umdrehungen pro Sekunde ([Jones et al.], [Simon et al., Table 1, experimentelle Werte]). Bei den Messungen wurde dabei das käufliche Modell 'Levitron' verwendet, vermutlich in seiner Standardausführung und nicht der 'Super-Levitron'. Der Kreisel wog 21,35 g und hatte ein magnetisches Moment von 0,65 Am². Die obere und untere Grenzfrequenz sind von den Parametern des Systems abhängig. (Vergl. [Simon et al., Table 1]; dort sind zwei weitere, teilweise hausgemachte Modelle dokumentiert.) Nach [Jones et al.] variiert die untere Frequenz, bei der das Modell 'Levitron' abstürzt, von 18-20 Hz, je nach Anzahl der Unterlegscheiben, die der Kreisel trug.

4.4 Ausblicke

Weitere Ideen für Experimente mit dem Levitron, für die innerhalb meiner Studienarbeit keine Zeit mehr war, sollen noch kurz aufgelistet werden.

Die Stabilitätsbereiche bei ständiger vertikaler Achsenlage des Levitrons könnte man versuchen, folgendermaßen zu messen: Auf die Kreiselachse wird von oben her ein langes Kunststoffröhrchen gesteckt, dessen oberes Ende an eine feine Waage gehängt wird. Die Magnetbasis wird auf einem höhenverstellbaren Tisch plaziert (Abb. g*4-5). Falls der Kreisel zentral auf der Symmetrieachse über der Magnetbasis bleibt, herrscht laterale Stabilität. Den Bereich senkrechter Stabilität ermittelt man, indem man das scheinbare Gewicht des Kreisels in Abhängigkeit von der Höhe des Basismagneten mißt.

Ob das Mitwippen der Kreiselachse maßgeblich für dessen seitliche Stabilität ist, kann sich aus dem in Abb. h*4-5 gezeigten Aufbau ergeben. Der Kreisel wird auf ein Kunststoffröhrchen gesteckt, das mit einer unten daran angebrachten Spitze auf einem Gegenstand – z.B. einem Buch – ruht, der auf die Magnetbasis gelegt wurde. Der Kreisel rotiert dabei nicht. Stimmt die Position des so festgelegten Drehpunktes mit dem scheinbaren Drehpunkt der Mitwippbewegung des schwebenden Kreisels überein, dann sollte der Aufbau stabil sein. (Nach Abschluß der Studienarbeit führte ich Versuche gemäß Abb. h*4-5 durch, wobei ich an Stelle eines Kunststoffröhrchens einen Kegel aus Knetmasse benutzte, aus dessen nach unten weisender Spitze ein Zahnstocher herausragte (Photo 18 des Photoanhangs). Diese Versuche bestätigten die Hypothese, dass das Mitwippen der Kreiselachse den Kreisel seitlich stabilisieren kann.)

Wer sehr große Bastellust hat, kann sich an folgende spektakuläre Herausforderung wagen: zwei Kreisel schweben übereinander. Dabei müßte der untere Kreisel eine zwischen derjenigen des Basismagneten und der des oberen Kreisels

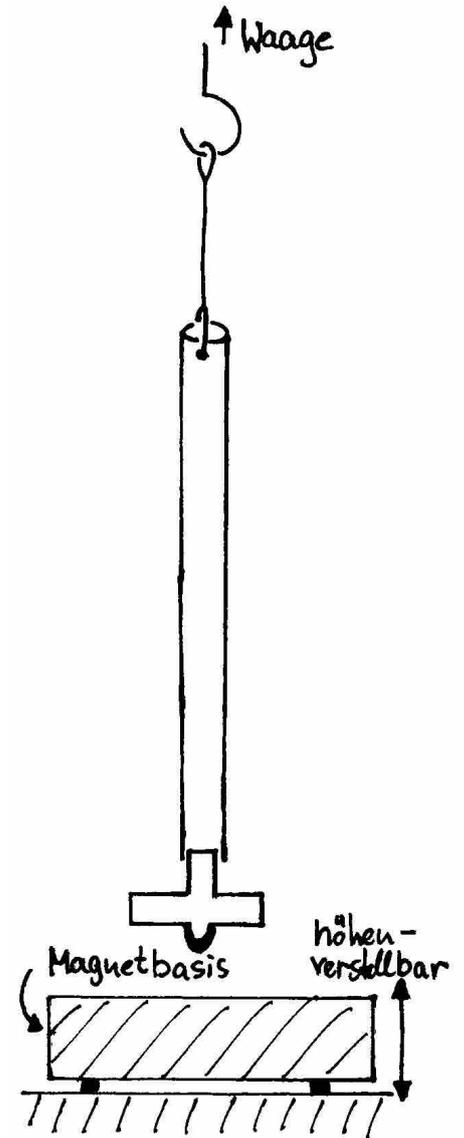


Abb. g*4-5: Bestimmung der Stabilitätsbereiche des Levitron bei fixierter vertikaler Achsenlage.

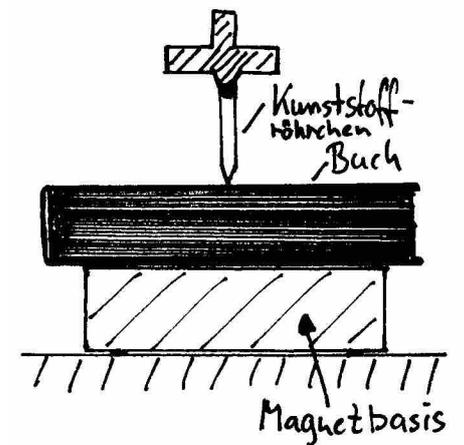


Abb. h*4-5: Ermöglicht das Mitwippen der Kreiselachse die seitliche Stabilität des Levitrons?.

liegende Größe haben. Die Magnetisierung des unteren Kreisels muß stärker sein als die des oberen und die Polungen dieser beiden Permanentmagnete müssen entgegengesetzt sein.

Interessant wäre es auch, den Anteil der in den Kupfer-Tara-Scheiben des Levitrons fließenden Wirbelströme an der Abbremsung des Kreisels festzustellen. Dazu müßten isolierende schwere Ersatz-Unterlegscheiben z.B. aus Marmor, Stein oder Keramik zur Verfügung stehen. Den Einfluß der Luftreibung kann man mit Vergleichsmessungen in Vakuum ermitteln. Dies wird vereinfacht durch ein neuerdings von derselben Firma, die auch den Levitron herstellt, vertriebenes Zusatzgerät.

Dieser sogenannte 'perpetuator' hat die Form einer Kunststoffschachtel mit Netzteil, auf die der Super-Levitron gestellt wird. Bei richtiger Justierung wird der Kiesel durch ein rotierendes magnetisches Feld in Drehung gehalten, wodurch er tagelang vor sich hinschweben kann. Damit ist es außerdem umso einfacher geworden, den Levitron in einem Metier zu verwenden, für das er prädestiniert erscheint – der Zauberei. Eine Anregung dazu sieht man auf den Photos 4 und 5 des Photoanhangs.

5 Die Thomson-Ring-Apparatur

Die im Rahmen dieser Studienarbeit gebaute Apparatur besteht im Wesentlichen aus einer hochinduktiven Spule zusammen mit verschiedenen in die Spule passenden Eisenkernen nebst einigen Aluminiumringen, die auf die aus der Spule herausragenden Eisenkerne gesteckt werden können (Abb. a*5-1). Dieses Gerät wurde bekannt durch Experimente, die Prof. Elihu Thomson damit durchführte (siehe [Fleming]). Deshalb wird es auch Thomson-Ring-Apparatur genannt (engl. 'Thompson's ring' apparatus, 'jumping ring' apparatus [Sumner, Thakkar]; sic, dort benutzte Rechtschreibung vermutlich fehlerhaft). Bei den zahlreichen Versuchen, die man mit dieser Apparatur machen kann, führt der Weg zum Verständnis fast immer über das Induktionsgesetz, unter besonderer Beachtung von dessen Konsequenzen für den zeitlichen Verlauf der induzierten Ströme und deren Richtungen. Deshalb eignet sich das Gerät gut dafür, in Vorlesungen die Wirkungsweise des Induktionsgesetzes zu zeigen und Verständnis für seine Feinheiten und Finessen zu wecken.

Zunächst sollen zwei für die Thomson-Ring-Apparatur typische Experimente beschrieben und, soweit mein Verständnis reicht, erklärt werden. Die Möglichkeit des zweiten Versuches war Anlaß dafür, gerade dieses Gerät als Untersuchungsobjekt für ein Teilthema der Studienarbeit zu wählen: er beinhaltet das Schweben eines Gegenstandes – wenngleich das Schweben auch nicht frei ist.

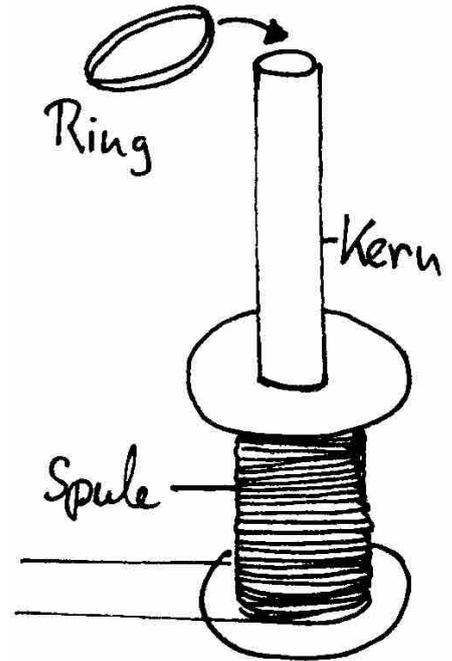


Abb. a*5-1: Thomson-Ring-Apparatur.

5.1 Versuch 'springender Ring'

Dieses Experiment, das ich zum ersten Mal in der Oberstufe sah, wird oft durchgeführt, um daran die Lenzsche Regel zu demonstrieren. Ein Metallring wird über den Spulenkern gestülpt und auf die obere Endscheibe der Spule gelegt, an welcher zunächst keine äußere Spannung anliegt. Wird nun die Spule mit einem Netzgerät (mit bei uns bis zu 150 V Ausgangsspannung) verbunden, so wird der Ring ruckartig nach oben abgestoßen und springt bei ausreichender Spannung über das obere Ende des Eisenkernes hinaus (Abb. b*5-1). Zur Erklärung dieser spektakulären Erscheinung gehen wir davon aus, daß das Netzgerät Gleichspannung abgibt, gleichwohl für die in der Studienarbeit durchgeführten Experimente aus praktischen Gründen Wechselstrom verwendet wurde.

Nach dem Induktionsgesetz B·1-6 in Abschnitt refformelnabschn gilt für die im Metallring induzierte Spannung

$$U_{ind} = +\dot{\Phi}^{(+)} \dot{I}_{Spule}. \quad (A\cdot5-1)$$

Dabei soll $\dot{\Phi}^{(+)}$ Proportionalität mit einer positiven Proportionalitätskonstanten bedeuten. Die Positivrichtung für den Strom und die Spannung im Ring wurde in demselben Umlaufsinn festgelegt, wie in der sich unter dem Ring befindenden Spule. Damit ist die auch als Gegeninduktivität bezeichnete Proportionalitätskonstante zwischen U_{ind} und \dot{I}_{Spule} positiv.

Nimmt man für den Metallring einen rein Ohmschen Widerstand R an, so ergibt sich für den durch den Ring fließenden Strom I aus der Maschenregel

$$R \cdot I + U_{ind} = 0$$

die Proportionalität

$$I \dot{\Phi}^{(+)} - \dot{I}_{Spule}. \quad (B\cdot5-1)$$

Das entspricht ganz der Lenzschen Regel: die Wirkung der Induktion (I bzw. das zugehörige Magnetfeld) ist ihrer Ursache (\dot{I}_{Spule} bzw. der Veränderung des zugehörigen Magnetfeldes) entgegengesetzt. Gibt man den zeitlichen Anstieg von \dot{I}_{Spule} vor, so ergibt sich daraus der Verlauf von I (Abb. c*5-1).

Der Verlauf von I ist jedoch nur dann wie oben angegeben zu erwarten, wenn der Ring an einer Stelle festgehalten wird. Ansonsten lassen ihn nach oben gerichtete Kräfte in die Höhe schnellen, wodurch sich der magnetische Fluß Φ durch den Ring zusätzlich verändert und damit die induzierte Spannung und der Strom I . Die Bewegung des Ringes zu berücksichtigen, ist kompliziert

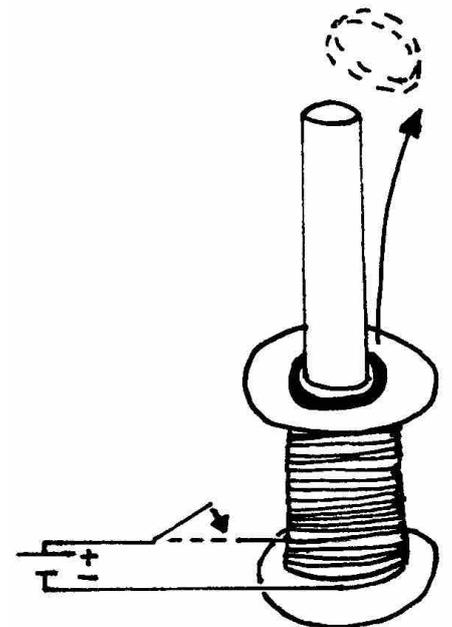


Abb. b*5-1: Versuch springender Ring.

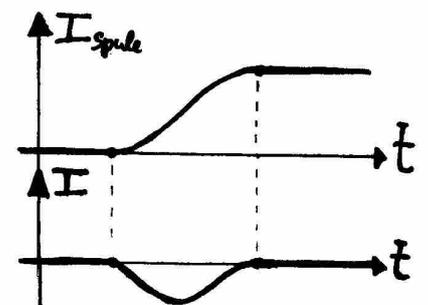


Abb. c*5-1: Im Ring induzierter Strom I .

und nur näherungsweise machbar [Sumner, Thakkrar].

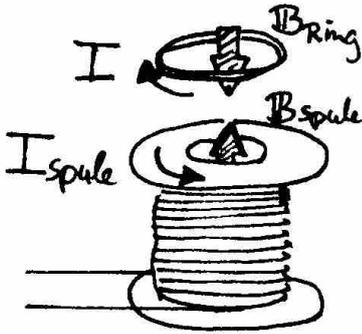


Abb. d*5-2: Modellbild zweier Dipole.

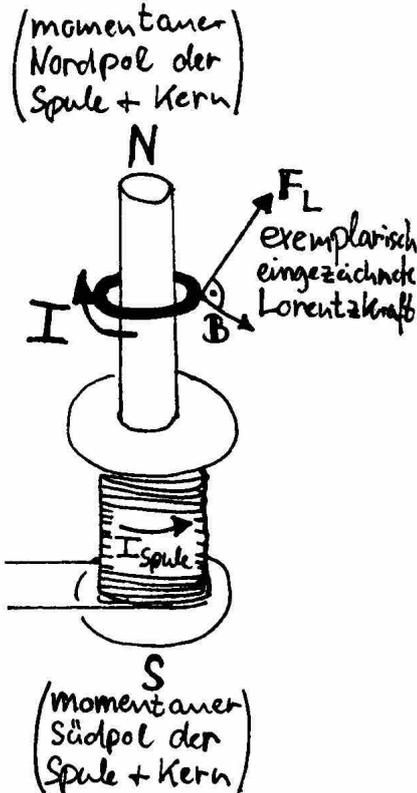


Abb. e*5-2: Erklärung über Lorentzkraft.

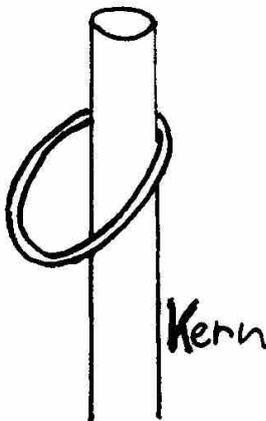


Abb. f*5-2: Die Ring schweben nie frei.

Daß die zwischen Ring und Spule auftretenden Kräfte abstoßend sind, kann man auf zwei Arten verstehen.

Erstens, indem man Spule und Ring jeweils als einen magnetischen Dipol auffaßt, die wegen der unterschiedlichen Vorzeichen der sie durchfließenden Ströme I_{Spule} und I entgegengesetzt ausgerichtet sind (Abb. d*5-2). Die Situation erinnert auch an das Gesetz, daß zwei gerade parallele Drähte, die in entgegengesetzter Richtung von Strom durchflossen werden, sich abstoßen. Dem einen Draht entspricht hier der Ring, dem anderen die Spule.

Eine genauere Analyse erhält man zweitens, indem man die auf den stromdurchflossenen Ring im Magnetfeld der Spule wirkende Lorentzkraft betrachtet (Abb. e*5-2). Für die nach oben zeigende Komponente der Lorentzkraft F_L spielt nur die radiale Komponente des magnetischen Feldes B der Spule samt Eisenkern an der betreffenden Stelle eine Rolle. Die Richtungen vom im Ring fließenden Strom I und von \dot{I}_{Spule} sind dabei nach Gleichung (B-5-1) entgegengesetzt.

Trennt man eine von Gleichstrom durchflossene Spule von der Spannungsquelle ab, so überlegt man sich in denselben Schritten wie oben, daß an einem auf der Spule liegenden Ring eine Kraft nach unten zieht. Die Wirkungen dieser Kraft kann man sichtbar machen, indem man die Apparatur waagrecht dreht und den Ring an Fäden aufhängt, wobei man natürlich zwischen Spule und Ring etwas Platz lassen muß.

5.2 Versuch 'schwebender Ring'

Verwendet man ein Netzgerät mit Wechselspannung (50Hz) und schaltet die Spannung im Gegensatz zum vorigen Versuch nicht schlagartig ein, sondern langsam und kontinuierlich durch Drehen am Knopf des Netzgeräts, so geschieht etwas Seltsames. Bei ausreichender Ausgangsspannung hebt sich der Ring von der oberen Spulenscheibe, bewegt sich ein Stück nach oben und verweilt schwebend in einigem Abstand über dem oberen Ende der Spule. Er schwebt jedoch nie frei, sondern berührt immer innen an einer Seite den Eisenkern der Spule (Abb. f*5-2). Die Position des Rings läßt sich durch Erhöhen der Versorgungsspannung anheben, durch Erniedrigen absenken. Auffällig ist, daß der Ring während des Schwebens stark vibriert, was man an einem klirrenden Klingelgeräusch hört, welches dadurch entsteht, daß der Ring gegen den Eisenkern schlägt. Versuchen wir zunächst eine Erklärung zu finden, indem wir wie im letzten Abschnitt annehmen, der Ring habe einen rein Ohmschen Widerstand. Dann gilt wieder die Proportionalität (Gleichung B-5-1)

$$I \overset{(+)}{\sim} -\dot{I}_{Spule}.$$

Aus der Abb. e*5-2 wird klar, daß für den nach oben gerichteten Anteil der Lorentzkraft auf den Metallring gilt

$$F_{L\uparrow} \sim I \cdot B_{Spule,radial}$$

und damit

$$F_{L\uparrow} \overset{(+)}{\sim} -I \cdot I_{Spule}. \tag{C-5-2}$$

Nimmt man an

$$I_{Spule} \overset{(+)}{\sim} \sin \omega t, \tag{D-5-2}$$

so folgt aus (B-5-1)

$$I \overset{(+)}{\sim} -\cos \omega t, \\ F_{L\uparrow} \overset{(+)}{\sim} -(-\cos \omega t) \cdot \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin(2\omega t).$$

Diese Funktionen sind in Abb. g*5-3 zusammengefaßt.

Erstaunlicherweise wäre die senkrechte Komponente $F_{L\uparrow}$ der auf den Ring wirkenden Lorentzkraft im zeitlichen Mittel Null. Mir sind zwei bis jetzt noch nicht beachtete Einflüsse bekannt, die die bisherige Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment erklären könnten.

Zum einen hat der Metallring neben seinem Ohmschen Widerstand zusätzlich Abb. g*5-3 einen induktiven, der durch Selbstinduktion verursacht wird, und der eine Verschiebung der Phase des Ringstromes I relativ zur bisherigen Lage bewirkt. Zum anderen steht der Ring während des Schwebens nicht still an einer Stelle im Raum, sondern er führt Vibrationen aus, die durch das zeitliche Oszillieren der Lorentzkraft verursacht werden. Diese vertikalen Bewegungen des Ringes führen zusammen mit der vertikalen Inhomogenität des Magnetfeldes der Spule zu einer Veränderung der Lorentzkraft und außerdem durch die vibrationsbedingte Änderung des magnetischen Flusses durch den Ring zu einer zusätzlichen im Ring induzierte Spannung, die wiederum Einfluß auf die Bewegung des Ringes hat. Aufgrund der Komplexität des Einflusses der Vibrationen soll hier nur die Auswirkung der Induktivität des Ringes untersucht werden.

Laut Maschenregel ist am Ring die Summe der induzierten Spannung U_{ind} , der am Ohmschen Widerstand R abfallenden Spannung $+R \cdot I$ und der durch Selbstinduktion entstehenden Spannung $+L \cdot \dot{I}$ gleich Null.

$$U_{ind} + R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0.$$

Es gilt wieder $U_{ind} \overset{(+)}{\sim} +\dot{I}_{Spule}$ (Gleichung A.5-1). Ab sofort wollen wir den Strom und die Spannung als komplexe zeitabhängige Exponentialfunktionen schreiben, deren Realteil der Wert ist, der gemessen werden kann. Damit ist

$$\dot{I} = i\omega I,$$

denn im Ring wird sich Wechselstrom derselben Kreisfrequenz ω einstellen wie in der Spule. Damit folgt

$$(R + i\omega L)I \overset{(+)}{\sim} -\dot{I}_{Spule}. \tag{E.5-3}$$

Der Strom I im Ring hinkt der Größe $-\dot{I}_{Spule}$ um einen Phasenwinkel φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ hinterher, wobei gilt

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}. \tag{F.5-3}$$

Der Winkel φ entspricht dem Winkel zwischen dem komplexen Widerstand $R + i\omega L$ und der Realteilachse in der komplexen Zahlenebene (Abb. h*5-3), es gilt also

$$R + i\omega L \overset{(+)}{\sim} e^{i\varphi}.$$

Die Phasenverschiebungen zwischen I_{Spule} , \dot{I}_{Spule} und I sind im Zeigerdiagramm (Abb. i*5-3) zu sehen, das den Moment $t = 0$ darstellt, wobei

$$I_{Spule} \overset{(+)}{\sim} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

angenommen wurde in Anlehnung an Gleichung (D.5-2).

Es gilt

$$I \overset{(+)}{\sim} e^{-i\varphi} (-\dot{I}_{Spule}) = e^{-i\varphi} (-i\omega) I_{Spule} \overset{(+)}{\sim} -e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Für den senkrechten Anteil der Lorentzkraft ergibt sich aus (C.5-2)

$$\begin{aligned} F_{L\uparrow} &\overset{(+)}{\sim} -\operatorname{Re}(I) \cdot \operatorname{Re}(I_{Spule}) \overset{(+)}{\sim} -\operatorname{Re}(-e^{i\omega t} e^{-i\varphi}) \operatorname{Re}(e^{i\omega t - \frac{\pi}{2}}) \\ &= \operatorname{Re}([\cos \omega t + i \sin \omega t] \cdot [\cos \varphi - i \sin \varphi]) \cdot \sin \omega t \\ &= (\cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \omega t \\ &= \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \sin \varphi \cdot \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

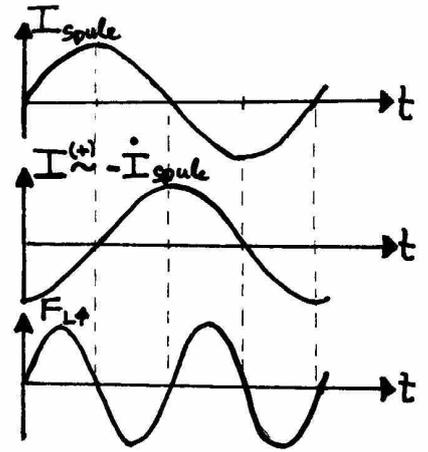


Abb. g*5-3: Zeitl. Verlauf des Spulenstroms und der Lorentzkraft bei Vernachlässigung der Induktivität des Ringes.

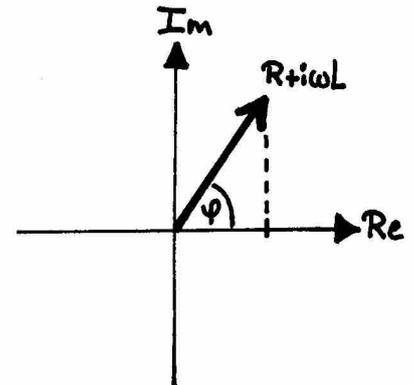


Abb. h*5-3: Phasenwinkel φ .

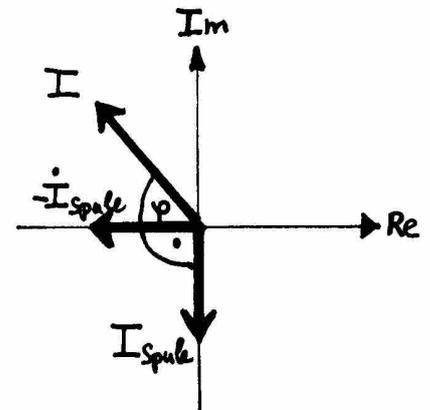


Abb. i*5-3: Phasenbeziehung zwischen Ringstrom und Spulenstrom.

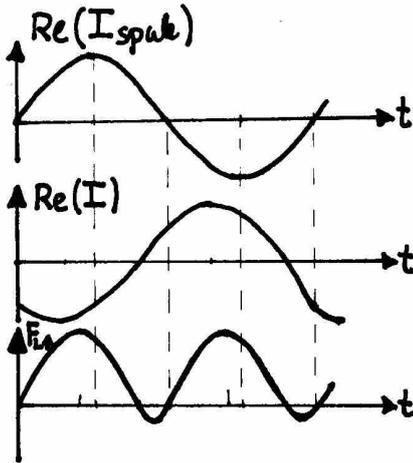


Abb. j*5-4: Verlauf der Lorentzkraft bei Berücksichtigung der Induktivität des Rings.

Der zeitliche Mittelwert ist

$$\overline{F_{L\uparrow}} \approx \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

Für $L = 0$ erhält man wieder $\overline{F_{L\uparrow}} = 0$, für $L > 0$ ist $\overline{F_{L\uparrow}} > 0$, die Lorentzkraft also im zeitlichen Mittel mehr nach oben gerichtet als nach unten. Das wird auch aus Abb. j*5-4 deutlich.

Genau genommen muß auch bei dem Versuch 'springender Ring' die Induktivität des Ringes berücksichtigt werden. In Abb. c*5-1 wird dadurch das Anschwellen und Abklingen des Betrages $|I|$ vom Spulenstrom etwas verzögert.

5.3 Beschreibung der im Rahmen der Studienarbeit gebauten Thomson-Ring-Apparatur

Die während der Studienarbeit gebaute Apparatur dient zum einen dem Zweck, ein spezielles System zu untersuchen, das Ansätze des elektrodynamischen Schwebens zeigt, zum anderen soll sie in der Vorlesung 'Grundlagen physikalischer Messungen II' für Demonstrationsexperimente benutzt werden. Die Apparatur ist auf dem Photo 6 des Photoanhangs abgebildet.

Die Spule besteht aus 770 Windungen lackierten Kupferdrahtes vom Durchmesser 0.9 mm (ohne Lack), die um einen Spulenkörper aus Plexiglas gewickelt wurden. Die Abmessungen der Spule sind in Abb. k*5-4 eingetragen.

Passend zur Spule gibt es zwei zylindrische Eisenkerne – einen Weicheisenkern und einen Kern, der aus grün-lackierten Blumendrahtstücken besteht, die in einem Plexiglasrohr stecken (Abb. l*5-4 und Photo 7). Der aus Blumendraht bestehende Kern hat den Vorteil, daß Wirbelströme in horizontalen Ebenen weitgehend verhindert werden, da die einzelnen Drähte elektrisch gegeneinander isoliert sind. Dieser Kern erwärmt sich bei Betrieb der Apparatur kaum, im Gegensatz zum Weicheisenkern, bei dem es vorkommen kann, daß man sich die Finger daran verbrennt.

Es muß angemerkt werden, daß der Spulenkörper zwischenzeitlich zerbrochen war und wieder geklebt wurde, wodurch die Windungen im unteren Bereich der Spule etwas in Unordnung gebracht wurden. Anlaß des Zerbrechens war eine häufige, sehr starke Erhitzung des Spulenkörpers bei Betrieb der Apparatur, wodurch sich der Durchmesser des inneren Lochs der Spule immer mehr verkleinerte. Schließlich konnte der im Spulenkörper steckende Weicheisenkern nur noch mit Gewalt aus der Spule entfernt werden, wobei der Spulenkörper zerbrach. Später hat sich während der Sprungversuche das innere Plexiglasrohr des Spulenkörpers aus diesem herausgelöst (siehe Abschnitt 5.5). Er wurde durch ein hitzebeständigeres Teflonrohr ersetzt.

Der Spulenkörper ist auf einer Holzplatte montiert, an der auch Bananensteckerbuchsen zum Anschluß an die Spannungsversorgung angebracht wurden. Nachträglich wurde ein bei Bedarf in Reihe zur Spule zu schaltender Lastwiderstand von 2,2 Ohm zur Messung des Spulenstromes fest auf der Holzplatte installiert. Dieser ist jedoch auf den Photos zum Teil noch nicht zu sehen.

Für Experimente wurden zahlreiche Aluminiumringe unterschiedlichster Formen angefertigt, von denen nur die in Tab. I-5-4 bei Messungen benutzt wurden.

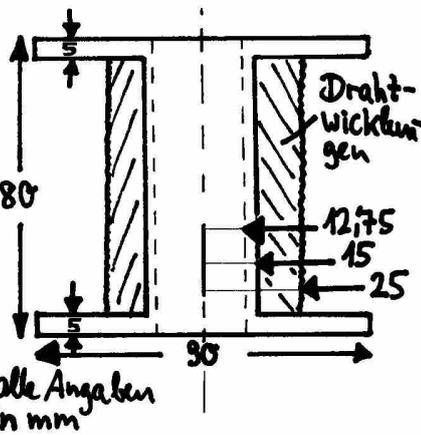


Abb. k*5-4: Hauptspule.

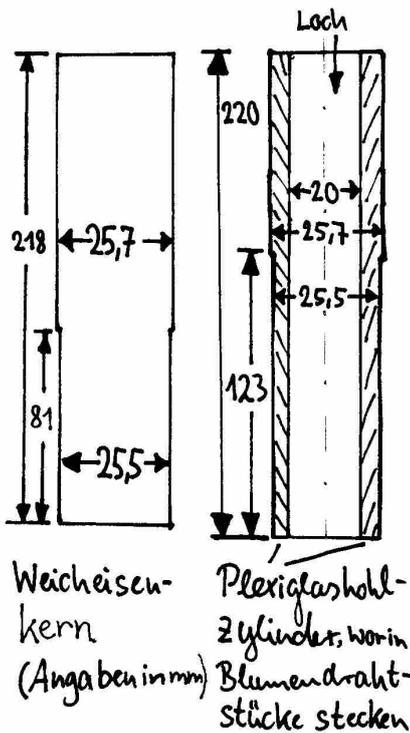


Abb. l*5-4: Kerne.

Ring#	Außen-Ø	Höhe h	Dicke d	Bemerkung
1	47,9 mm	1,7 mm	2,5 mm	mein Standardring
1a	"	"	"	wie Ring 1, exakter gefertigt
2	70,2 mm	1,7-2,6 mm	10,2 mm	sehr schief vom Rohr abgesägt
3	59,5 mm	8,4 mm	10,5 mm	große Oberfläche
4	50 mm	2,1 mm	0,1 mm	ganz dünn
5	53,8 mm	9,2 mm	9,4 mm	dicker Ring
6	68,0 mm	6,0 mm	9,0 mm	dicker Ring, größerer Radius
7	120,0 mm	8,0 mm	10,0 mm	dicker Ring, enormer Radius

Tab. I-5-4

Alle diese Ringe, sowie eine Schwebespule, ein durchbrochener Ring und ein quadratischer Ring sind in Photo 8 zu sehen.

5.4 Konfiguration des Magnetfeldes

Gemessen wurde nur das Magnetfeld der Spule bei eingesetztem Blumendrahtkern, wobei durch die Spule Gleichstrom der Stärke 2 A floß. Jeweils die vertikale und die radiale Komponente des Magnetfeldes wurden in einem Bereich bestimmt, der vertikal von 2 cm bis 15 cm über dem oberen Ende des Spulenkörpers (d.h. bis $\cong 1$ cm über dem Ende des Kerns) und radial von 1 cm bis 3,5 cm Entfernung von der Wand des Spulenkerne ausgedehnt ist.

Zur Messung des Magnetfeldes wurde eine zum Lieferumfang des Hall-Generators 134200 der Firma kröncke gehörende Hallsonde benutzt, sowie der dazugehörige Mikrovoltverstärker 131000 (Photo 9). Die vom Mikrovoltverstärker verstärkte Hallspannung wurde an einem rms Multimeter PM 2518 von Philips abgelesen.

Das Meßsystem war so geeicht, daß 1 mV auf dem digitalen Multimeter $2 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 2 \text{ Gauß}$ entsprachen. Durch das Erdmagnetfeld ergibt sich also eine Meßungenauigkeit von etwa 0,5 mV. Ich schätze die langfristige Ungenauigkeit jedoch größer ein, denn der Nullpunkt des Systems verschob sich mit der Zeit. Dies merkte man daran, daß die Meßwerte bei Vertauschung von Vorder- und Rückseite der Hallsonde an einem Platz nicht mehr jeweils das Negative voneinander waren. Es ergaben sich betragsmäßige Abweichungen bis zu 2 mV, so daß man mit einer gesamten Meßungenauigkeit von mindestens 1 mV rechnen muß.

Eine Skizze des Magnetfeldes und eine Tabelle der Meßdaten sind in Anhang A wiedergegeben. Auf der Skizze entsprechen $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ mV} \hat{=} 20 \text{ Gauß}$. Im Bereich des eingezeichneten Magnetfeldes ist die räumliche Skala um den Faktor 5 in radialer Richtung gestreckt worden. Auffallen ist, daß es eine Höhe gibt, in der das Magnetfeld in rein radiale Richtung zeigt. Das ist etwa 7 cm über der Spule der Fall. Darüber hat das Feld eine nach oben zeigende Komponente, darunter einen nach unten zeigenden Anteil. Später bei der Frage nach der Stabilität von schwebenden Ringen ist entscheidend, daß die senkrechte Komponente des Magnetfeldes in jeder Höhe nach außen hin immer mehr nach unten zeigt. Nach [Sumner, Thakkrar] kann die Abhängigkeit von sowohl der vertikalen als auch der radialen Komponente des Magnetfeldes von der Höhe h durch eine Relation der Form

$$B = \alpha - \beta h$$

mit $\alpha, \beta \geq 0$ dargestellt werden. Dabei ist laut [Sumner, Thakkrar] die vertikale Komponente an seinem Versuchsaufbau bei Spannungen bis zu 90 V in guter Näherung proportional zum Spulenstrom, während für die radiale Komponente schon ab 40 V Sättigungseffekte beginnen.

Die Messungen wurden an der den Stromzuleitungen zur Spule entgegengesetzten Seite durchgeführt. Exemplarische Messungen der Winkelabhängigkeit des theoretisch völlig rotationssymmetrischen Feldes ergaben so geringe Variationen (ca. 0,3 mV auf einer Höhe von 2 cm bzw. 10 cm über dem oberen Ende der Spule, sowohl bei senkrechter als auch bei radialer Komponente), daß es angesichts einer Meßungenauigkeit von $\cong 1$ mV keinen Sinn macht, Diagramme dazu abzubilden.

Die Lage der Hallsonde relativ zur Spule wurde mit Hilfe von einer quadratischen Plexiglasplatte einjustiert, die mit Strichen in Abständen von je 0,5 cm beschriftet war. Die Platte besitzt ein Loch von demselben Durchmesser wie dem der Kerne in der Mitte und kann durch zwei Stellschrauben in beliebiger Höhe arretiert werden (Photo 10). Der Aufbau zur Messung der vertikalen und radialen Komponente des Magnetfeldes ist in Photo 11 bzw. Photo 12 zu sehen.

5.5 Sprunghöhen und Schwebehöhen

a) Sprunghöhen. Die Höhe des Sprungs, den ein Ring beim Versuch 'springender Ring' macht, hängt von verschiedenen Parametern ab: der Form des Ringes, der Art des verwendeten Spulenkerne, der Größe der angelegten

Wechselspannung. Man sollte annehmen, daß mit dem Weicheisenkern höhere Sprünge erreicht werden als mit dem Kern aus Blumendraht, da der massive Weicheisenkern eine durch Magnetisierung ein stärkeres Feld erzeugt als die Blumendrahtstücke, zwischen denen Luftkanäle liegen. Für dünne Ringe wird die durch Experimente bestätigt, was man beispielhaft an den Meßergebnissen zu Ring 1a in Tab. II-5-6 erkennt. Auf dem Photo 13 des Photoanhangs sieht man die Vorrichtung zur Messung der Sprunghöhen.

Spannung	Blumendrahtkern		Weicheisenkern	
	Ring 1a	Ring 5	Ring 1a	Ring5
30 V	Surren	1,5 cm	–	2 cm
40 V	Surren	5,5 cm	0,2 cm	5,5cm
50 V	Surren	11,0 cm	1,1 cm	10,0 cm
60 V	1 mm	15,5 cm	3,0 cm	13,0 cm
70 V	2 mm	19,5 cm	5,2 cm	16,0 cm
80 V	3 mm	24,0 cm	7,1 cm	20,5 cm
90 V	5 mm	28,5 cm	8,7 cm	24,0 cm
100 V	1,0 cm	33,0 cm	10,3 cm	28,0 cm
110 V	1,2 cm	36,0 cm	11,9 cm	32,0 cm
120 V	1,6 cm	40,5 cm	14,5 cm	36,0 cm
140 V	2,2 cm	46,5 cm	19,0 cm	45,0 cm
160 V	2,9 cm	51,5 cm	22,0 cm	53,0 cm
180 V	–	55,5 cm	–	64,5 cm
200 V	–	58,5 cm	–	–
h_0 [cm]	–1,91(18)	–5,04(187)	–8,02(39)	–11,52(85)
m [cm/V]	0,0293(17)	0,348(16)	0,188(04)	0,406(08)

Tab. II-5-6

Relativ dicke Ringe mit großem Querschnitt wie Ring 5 springen jedoch bei niedrigen Spannungen bei Benutzung des Blumendrahtkerns höher. Bei hohen Spannungen (bei Ring 5 ab 160 V) erreichen auch dicke Ringe bei dem Weicheisenkern die höchsten Sprünge. Für dieses Phänomen, das bei den Schwebeversuchen ähnlich auftritt, habe ich noch keine Erklärung finden können. Denkbar ist, daß sich die Struktur des Magnetfeldes von der Spule zusammen mit dem Weicheisenkern deutlich von der des Magnetfeldes bei Benutzung des Kerns aus Blumendraht unterscheidet. Zur Klärung dieser Frage müßte das Magnetfeld der Spule mit dem Weicheisenkern vermessen werden, was bis jetzt noch nicht geschehen ist. Eine andere Vermutung ist, daß die Ursache des Phänomens das unterschiedliche Sättigungsverhalten der beiden Kerne ist. Auch hier sollten weitere Messungen Klarheit schaffen. Eine letzte Vermutung ist, daß die Wechselwirkung zwischen dem Ring und dem Weicheisenkern andersartig ist als die zwischen dem Ring und dem Blumendrahtkern. Im Weicheisenkern können von den im Ring fließenden, zeitabhängigen Strömen Wirbelströme induziert werden, im Kern aus Blumendraht nicht.

Bei hohen Spannungen fehlen in Tab. II-5-6 einige Werte, da einerseits bei Benutzung des Blumendrahtkerns der Spulendraht, andererseits bei Benutzung des Weicheisenkerns der Kern zu heiß wird. Größere Spannungen als 160 V sind für unsere Apparatur ungeeignet. Nach der Messung mit dem Blumendrahtkern und Ring 5 bei 200 V wurde der innere Plexiglaszylinder der Spule so heiß, daß dieser sich am anschließend in die Spule gewechselten Weicheisenkern festzog und aus der Spule gezogen werden konnte – der Hartkunststoffkleber war geschmolzen. Das Plexiglasrohr konnte problemlos durch ein Teflonrohr substituiert werden, denn die Wicklungen der Spule waren nicht in Unordnung geraten. Vor dem Gebrauch höherer Spannungen als 160 V rate ich jedoch auch jetzt dringend ab.

Für Spannungen über 100 V ist es wichtig, daß der Spulenkörper fest auf einer Unterlage montiert ist. Ansonsten wird beim Anschließen einer Spannung der Kern in die Spule gezogen, wodurch bei unserem senkrechten Aufbau de facto die Spule außen am Kern hochklettert.

Die in dem Artikel [Sumner, Thakkrar] theoretisch begründete annähernde

Proportionalität zwischen angelegter Spannung und Sprunghöhe wird bei uns ziemlich genau erfüllt. In Tab. II·5-6 sind jeweils die berechneten Werte für den Achsenabschnitt h_0 und die Steigung m der zugehörigen Regressionsgeraden eingetragen und deren sich aus der Regression ergebende Fehler.

b) Schwebehöhen. Schwebeversuche wurden hauptsächlich mit dem Kern aus Blumendraht gemacht, da dann keine vom Kern ausgehende Überhitzungsgefahr besteht. Den Versuchsaufbau zur Messung der Schwebehöhen kann man auf dem Photo 14 sehen. Die Schwebehöhe wurde als Abstand vom obersten Punkt des schräg schwebenden Ringes zur Oberfläche der Spule gemessen. Für den Ring 5 wurde die Schwebehöhe bei an der Spule anliegenden Spannungen von 40 bis 100 V in Schritten von 10 V gemessen (Tab. III·5-7). Dabei wurde der Kern aus Blumendraht benutzt.

U_{Spule}	I_{Spule}	Höhe h
40 V	2,1 A	3,2 cm
50 V	2,5 A	4,6 cm
60 V	3,0 A	6,4 cm
70 V	3,9 A	7,5 cm
80 V	5,1 A	8,4 cm
90 V	6,7 A	8,9 cm
100 V	8,6 A	9,8 cm

Tab. III·5-7

Zusätzlich wurde bei konstanter Spulenspannung von 80 V die Schwebehöhe aller in Tab. I·5-4 aufgezählter Ringe gemessen. Und zwar bei Verwendung beider Kerne (Tab. IV·5-7, Angaben in cm).

Ring#	1	1a	2	3	4	5	6	7
Blumendrahtkern	(2,2)	(1,2)	2,4	9,1	-	9,6	5,4	-
Weicheisenkern	6,6	4,9	4,5	8,5	3,8	8,6	5,2	-

Tab. IV·5-7

Bei den eingeklammerten Werten berührten die Ringe noch mit einer Seite die Oberfläche des Spulenkörpers, während die andere sich schon erhoben hatte. Ring 4 konnte nicht beim Blumendrahtkern und Ring 7 bei keinem der beiden Kerne bei einer Spannung von 80 V zum Schweben gebracht werden. Am höchsten schwebte Ring 5, am niedrigsten der sehr dünne Ring 4 und die Ringe 1 und 1a. Erstaunlicherweise lag Ring 1 immer deutlich höher als der maßgleiche Ring 1a. Vermutlich wurde in der Werkstatt bei der Fertigung des exakteren Ringes 1a eine andere Art von Aluminium mit einem höheren spezifischen Widerstand verwendet.

Tendenziell schweben Ringe mit dickeren Querschnitten höher als solche mit dünnen, außerdem Ringe mit größerem Radius niedriger als solche mit kleinem. Letzteres liegt ganz einfach daran, daß das Magnetfeld der Apparatur mit zunehmender Entfernung vom Kern abnimmt. Die erste Tendenz läßt sich nicht verstehen, wenn nur die Veränderung des Ohmsche Widerstandes und des Ringgewichts betrachtet wird, wohl aber wenn man beachtet, daß die Induktivität mit der Ringdicke langsamer abfällt als der Ohmsche Widerstand (vergl. Formeln G·5-8, H·5-8 im Abschnitt 5.6).

Bei Vergleich der Schwebehöhen, die mit beiden Kernen bei jeweils demselben Ring erreicht werden, beobachtet man ein analoges Phänomen wie bei den Sprunghöhen. Beim Weicheisenkern schweben alle dünnen Ringe deutlich höher als beim Blumendrahtkern, während der Rekordhalter, Ring 5, und die anderen 'dicken' Ringe 3, 5, 6 ihre höchste Höhe beim Kern aus Blumendraht erreichen. Eine Erklärung hierfür habe ich hier genausowenig wie unter a). Die Ursache des Phänomens wird in beiden Fällen dieselbe sein.

5.6 Die Phasenlage des beim Versuch 'schwebender Ring' in diesem induzierten Stromes

Im Abschnitt 5.2 wurde beschrieben, daß die Phasenbeziehung zwischen dem im Ring induzierten Strom I und dem durch die Spule fließenden Strom I_{Spule} vom Verhältnis des induktiven Widerstandes zum Ohmschen Widerstand des Ringes abhängt (Gleichung (F·5-3)):

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

Nach (E·5-3) gilt dabei

$$I \overset{(+)}{\sim} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \cdot I_{Spule}$$

Die Induktivität eines Einzelringes (Abb. m*5-8) ist näherungsweise

$$L = \mu_0 a \left(\ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \right) \tag{G·5-8}$$

Auf diese in [Lindner, Seite 83] angegebene Formel kommt man von der in [ABC, Band 1, Stichwort Induktionskoeffizient] stehenden durch die Näherung $\ln 8 \cong 2$. Die exaktere Formel wird in [Becker, Sauter, Abschnitt 6.1] unter der Voraussetzung $r \ll a$ hergeleitet.

Die Querschnitte unserer von Aluminiumrohren abgesägten Ringe sind jedoch rechteckig, nicht kreisförmig (Abb. n*5-8). Als Näherung wurde der in die Formel einzusetzende Radius r des kreisförmigen Querschnitts so bestimmt, daß die Kreisfläche der realen Querschnittsfläche entsprach

$$\pi r^2 = d \cdot h$$

Für den Ringradius a wurde der Mittelwert eingesetzt

$$a = \frac{1}{2} (\text{Außen-}\varnothing - d)$$

Die Ohmschen Widerstände unserer Ringe ergeben sich aus

$$R = \rho_{Alu} \cdot \frac{2\pi a}{d \cdot h} \tag{H·5-8}$$

wobei $\rho_{Alu} = 0,028 \cdot 10^{-6} \Omega$ angenommen wurde.

Für die Ringe 1 und 5 erhält man die in Tab. V·5-8 eingetragenen Werte.

	a	d	h	R	ωL	φ_{Luft}
Ring 1	22,7 mm	2,5 mm	1,7 mm	0,94 mΩ	0,029 mΩ	1,8°
Ring 5	22,2 mm	9,4 mm	9,2 mm	0,045 mΩ	0,015 mΩ	18,4°

Tab. V·5-8

Zusätzlich wurde der Phasenwinkel φ für die zusammen mit den Ringen auf Photo 8 des Photoanhangs abgebildete Schwebespule berechnet, die aus 1000 Wicklungen lackierten Kupferdrahtes vom Durchmesser 0,45 mm (ohne Lack) besteht und deren Abmessungen in Abb. o*5-8 eingetragen sind. Mit der Schwebespule können auch Schwebe- und Sprungexperimente gemacht werden, die hier allerdings nicht dokumentiert sind. Intention beim Bau der Schwebespule war es, ein Objekt zu entwerfen, dessen Induktivität deutlich dessen Ohmschen Widerstand übertrifft. Deren Ohmscher Widerstand wurde direkt mit einem Multimeter gemessen. Durch Anlegen von Wechselspannung und Messung des durch die Spule fließenden Wechselstromes wurde der Betrag des komplexen Widerstandes Z gemessen, woraus wegen $R^2 + (\omega L)^2 = |Z|^2$ der induktive Widerstand ωL folgt. Die Messung wurde einmal in Luft durchgeführt und einmal, während die Schwebespule über den Kern aus Blumendraht gesteckt war. Dadurch konnte eine effektive Permeabilität $\mu = (\omega L)_{Drähte} / (\omega L)_{Luft}$ des Blumendrahtkerns für diese Spule berechnet werden. Effektiv deshalb, weil der Kern nicht den gesamten Spuleninnenraum ausfüllte. Die Ergebnisse zeigt Tab. VI·5-9.

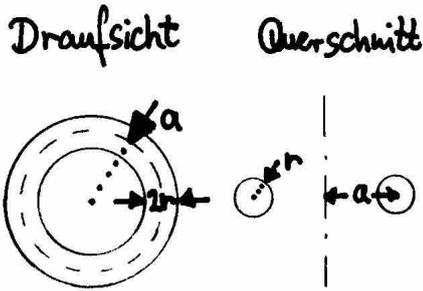


Abb. m*5-8: Einzelring mit kreisförmigem Querschnitt.

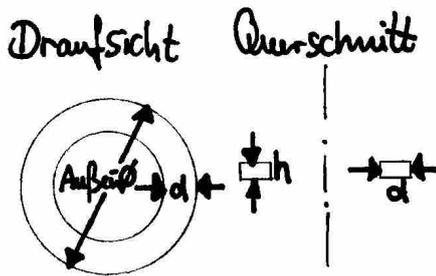


Abb. n*5-8: Einzelring mit rechteckigem Querschnitt.

Alle Angaben sind in mm.

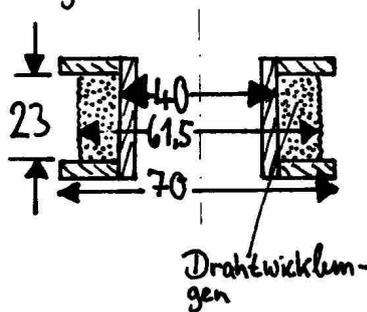


Abb. o*5-8: Die Schwebespule.

R	$ Z_{Luft} $	$ Z_{Drähte} $	$(\omega L)_{Luft}$	$(\omega L)_{Drähte}$	$\mu_{Drähte}$	φ_{Luft}	$\varphi_{Drähte}$
17,3 Ω	22,2 Ω	62,2 Ω	13,9 Ω	59,7 Ω	4,29	39°	74°

Tab. VI-5-9

Der Phasenwinkel φ kann auch experimentell bestimmt werden. Dazu wird mit Hilfe eines Oszilloskops die Phasenlage des im Ring fließenden Stroms I relativ zu der des Spulenstroms I_{Spule} ermittelt. Der Spulenstrom kann über einen in Reihe zur Spule geschalteten Lastwiderstand gemessen werden, die Phasenlage des Stroms im Ring sollte ohne große äußere Eingriffe bestimmt werden. Wir nutzten dabei die magnetischen Effekte des Ringstromes aus, die leicht mit einer Hallsonde gemessen werden können. Zuerst wurde die Hallsonde bei an der Spule angeschlossener Wechselspannung, jedoch bei Abwesenheit des Ringes in der Nähe des Spulenkerns so justiert, daß die Amplitude der periodisch sich verändernden Hallspannung möglichst klein wurde, also die Anzeige auf dem Oszilloskop so weit wie möglich einer Geraden ähnelte. Damit verliefen die Magnetfeldlinien in etwa parallel zum Sondenplättchen. Nachdem die Hallsonde in dieser Stellung arretiert worden war (Photo 15), wurde ihr ein über den Kern der Spule gestülpter Ring genähert. Bei günstiger Lage des Ringes (Photo 16) kann man am von ihm erzeugten Magnetfeld, das mit Hilfe der Hallsonde auf dem Oszilloskop dargestellt wird, die Phasenlage des im Ring induzierten Stromes ablesen.

Die im Anhang B abgehefteten Meßkurven 1 bis 4 zeigen jeweils im oberen Bereich den zeitlichen Verlauf des Spulenstromes gemessen in Form der an einem Widerstand von 2,2 Ω abfallenden Spannung. Durch die Spule floß jedesmal Wechselstrom der Stärke 1 A. Im unteren Teil der Meßkurve 1 ist die Magnetfeldstärke am oberen Ende des Kernes aus Blumendraht zu sehen, gemessen mit der Hallsonde ohne Mikrovoltverstärker. Dabei entsprechen hier wie auch in den folgenden Meßkurven 1 mV einer Feldstärke von 20 Gauß. Wie zu erwarten, sind die obere und die untere Kurve proportional zueinander. In den Meßkurven 2, 3 und 4 sind im unteren Teil die zeitlichen Verläufe des Stromes in den Ringen 1 und 5 bzw. der Schwebespule dargestellt. Aus den Kurven wurde jeweils der Phasenwinkel φ ermittelt. In Tab. VII-5-9 sieht man die Ergebnisse.

	Ring 1	Ring 5	Schwebespule
$\varphi_{Drähte}$	27°	47°	73°

Tab. VII-5-9

Der bei der Schwebespule gemessene Wert stimmt erstaunlich gut mit dem in Tab. VI-5-9 eingetragenen überein. Die für Ring 1 und Ring 5 berechneten Werte für φ_{Luft} aus Tab. V-5-8 liegen deutlich unter den gemessenen Werten $\varphi_{Drähte}$. Dies ist auch nicht anders zu erwarten, da bei der Rechnung nicht berücksichtigt wurde, daß die Ringinnenräume zum Großteil vom Material des Kerns aus Blumendraht durchsetzt waren. Trägt man der dadurch verursachten Vergrößerung der induktiven Widerstände durch Multiplikation mit der bei der Schwebespule ausgerechneten effektiven Permeabilität $\mu_{Drähte} = 4,29$ Rechnung, so erhält man $\varphi_{Drähte} = 7,5^\circ$ für Ring 1 und $\varphi_{Drähte} = 55^\circ$ bei Ring 5. Seltensamerweise ist dieser Wert für Ring 1 niedriger als der Meßwert, während der Wert bei Ring 5 über dem Meßwert liegt. Dies könnte seine Ursache in unterschiedlichem Material der Aluringe haben oder in den Näherungen bei der Formel zur Berechnung der Induktivitäten.

5.7 Stabilitätsanalyse

Zu meines Betreuerts und meiner eigenen Ernüchterung und entgegen einer Hoffnung erweckenden Abbildung im Buch [Walker, Abschnitt 6.21] konnten wir an unserer Apparatur kein freies Schweben erreichen. Alle Ringe berührten während des Schwebens mit ihrer Innenseite den Spulenkern. Auch nach auf den ersten Blick erfolgsversprechend erscheinenden Überlegungen konstruierte,

zusätzliche Spulen bewirkten nicht die gewünschte Stabilisierung.

a) **Statisches Ersatzbild.** Doch kehren wir zunächst zu der von uns gebauten Thomson-Ring-Apparatur in ihrer Grundform zurück. Senkrechte Stabilität ist hier bei allen schwebenden Ringen vorhanden und auch zu erwarten. Warum aber sind für alle Ringe die zentralen, symmetrischen Schwebepositionen seitlich instabil? Um die Überlegungen zu vereinfachen, betrachten wir die periodisch sich verändernden Ströme in der Apparatur und dem Ring und die daraus resultierenden Kräfte nur zu einem Zeitpunkt. Dafür wird der Zeitpunkt gewählt, zu welchem die senkrechten Anteile der auf den Ring wirkenden Lorentzkräfte maximal in die im zeitlichen Mittel vorherrschende Richtung zeigen.

Damit die in Bezug auf die Stabilität gezogenen Schlußfolgerungen verlässlich sind, muß die durch seine Masse verursachte Trägheit des Ringes groß genug sein im Verhältnis zur Amplitude und der Langsamkeit der periodischen Schwingungen der auf ihn wirkenden Kräfte. Ich gehe davon aus, daß die von uns benutzte Netzfrequenz von 50 Hz bei unseren Spannungen bis 230 V schnell genug ist im Vergleich zu den Massen unserer Ringe.

Da die senkrechten Komponenten der Lorentzkräfte auf den Ring monoton mit deren horizontalen Komponenten ansteigen (wegen unterschiedlicher Sättigung der horizontalen und der senkrechten Komponente des Magnetfeldes sind die senkrechten Komponenten der Lorentzkraft nicht exakt proportional zu den horizontalen), leuchtet es ein, daß zum betrachteten Zeitpunkt auch der horizontale Anteil der gesamten Lorentzkraft seinen Maximalwert annimmt. Es ist außerdem anzunehmen, daß die horizontale Komponente der resultierenden Kraft zu diesem Zeitpunkt in die innerhalb einer Periode dominierende Richtung zeigt. Das dürfte zumindest dann stimmen, wenn die in der Spule und im Ring fließenden Ströme zeitlich sinusförmig variieren, was z.B. wegen der Sättigungseffekte in Wirklichkeit auch nicht der Fall ist.

Kurz gesagt wollen wir zwar nicht beweisen, jedoch annehmen, daß die örtlichen Zu- und Abnahmen der zeitlich gemittelten Lorentzkräfte auf den Ring qualitativ durch die statische Situation zu dem Zeitpunkt repräsentiert werden, wo die senkrechte und die horizontale Komponente der gesamten Lorentzkraft maximal wird. In Abb. p*5-10 sind zwei Positionen des Ringes zu einem Zeitpunkt skizziert, zu dem die aufwärts gerichtete Lorentzkraft auf den Ring maximal sein soll. Bei entgegengesetzter Stromrichtung und entgegengesetzt gepoltem Magnetfeld wäre ebenfalls eine maximale senkrechte Komponente der Lorentzkraft erreicht.

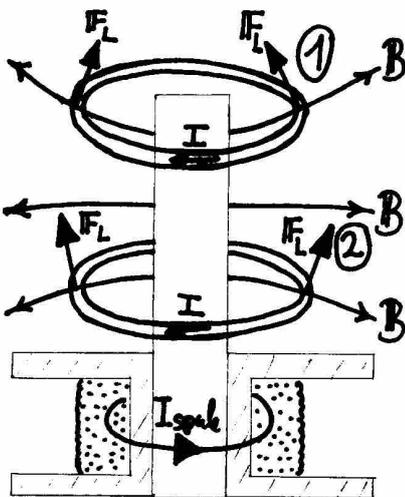


Abb. p*5-10: Zur Stabilität des Ringes in Position ① und Position ②.

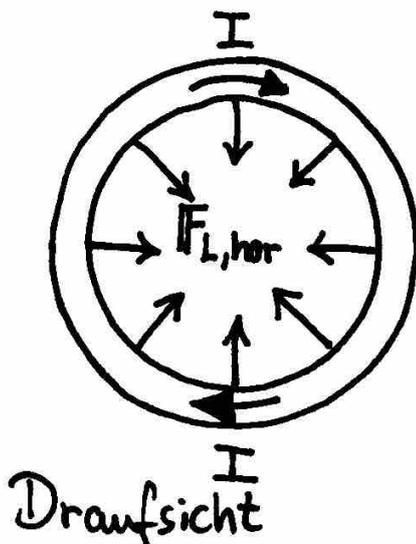


Abb. q*5-10: Rotations-Instabilität des Ringes in Position ①.

b) **Drehungen und Verschiebungen.** Grundsätzlich müssen bei der Frage nach der Stabilität zwei Bewegungsmöglichkeiten des Ringes unterschieden werden: Verschiebungen und Drehungen. Instabilität bezüglich einer dieser beiden Bewegungsarten reicht aus, um insgesamt Instabilität zu verursachen.

Befindet sich der Ring in ausreichender Höhe über der Spule – wie in Situation 1 der Abb. p*5-10 – so daß das Magnetfeld an den Stellen des Ringumfangs eine nach oben zeigende Komponente hat, so ist die zentrale, symmetrische Lage des Ringes instabil bezüglich Verdrehungen um horizontale Achsen. Dies liegt daran, daß die am Ringumfang ansetzenden Lorentzkräfte dort alle einen nach innen gerichteten horizontalen Anteil $F_{L,hor}$ haben (Abb. q*5-10). Bei einer kleinen Verdrehung um eine horizontale Achse entsteht deshalb ein Drehmoment, das den Ring in derselben Richtung weiter verdreht. Eine beobachtbare Auswirkung ist, daß die Ringe ab einer bestimmten Höhe den Kern an zwei gegenüberliegenden Stellen berühren, an einer Seite etwas höher, an der anderen tiefer.

Ganz anders verhält sich der Ring, an weiter unten liegenden Positionen, wo das Magnetfeld an allen Punkten des Ringumfangs eine nach unten zeigende Komponente hat. Da damit die horizontalen Komponenten $F_{L,hor}$ der am Kreisumfang angreifenden Lorentzkräfte alle nach außen zeigen, ist der Ring in seiner zentralen Lage stabil gegenüber Verdrehungen. Deshalb liegt er nur an einer Stelle am Kern an. Weil in der Nähe des Kernes die horizontale Komponente des magnetischen Feldes am stärksten ist und damit auch der nach oben

gerichtete Anteil der Lorentzkraft, liegt der Ring schräg in der Luft, wobei die Stelle, an welcher er den Kern berührt der oberste Punkt des Ringes ist.

Bezüglich seitlicher Verschiebungen ist der Ring jedoch immer instabil, unabhängig davon, in welcher Höhe er sich befindet. Ursache davon ist, daß die seitliche Komponente des Magnetfeldes in beliebiger Höhe ausgehend vom Kern nach außen hin abnimmt, die Vektoren des Magnetfeldes also immer mehr nach unten zeigen (vergl. Abschnitt 5.4, Konfiguration des Magnetfeldes). Bei horizontaler Verrückung des Ringes weg von seiner zentralen Position zeigen deshalb die horizontalen Komponenten der Lorentzkräfte an den vom Kern entfernteren Stellen des Ringes stärker nach außen als an den kernnäheren. Für eine der Situation 2 aus der Abb. p*5-10 entsprechende, niedrige Ringposition ist dies in Abb. r*5-11 dargestellt. Die auf den Ring wirkende resultierende Gesamtkraft bewegt den Ring weiter von der zentralen Position weg.

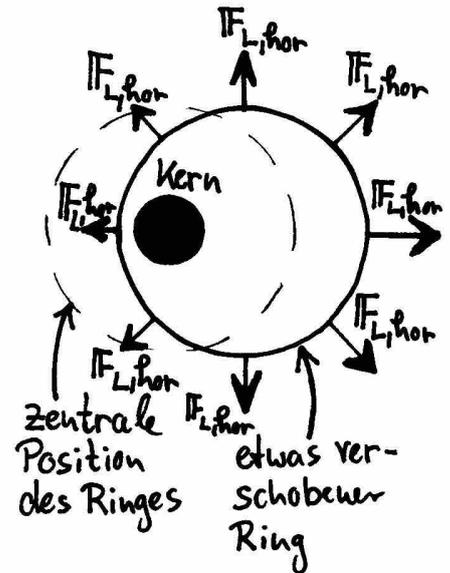


Abb. r*5-11: Translationsinstabilität (hier Position ②).

c) Experimente mit Zusatzspulen. Wie schon erwähnt, versuchte ich, dieses Manko der seitlichen Translations-Instabilität mit Hilfe von in unterschiedlichen Abständen vom Kern radialsymmetrisch um diesen auf Papprohre gewickelte zusätzliche Spulen zu beheben. Die Leitidee zur Konstruktion und zur Polung der Spulen relativ zur Hauptspule der Apparatur war es, das Magnetfeld so zu verändern, daß dessen senkrechter Anteil bei der in Abb. p*5-10 eingezeichneten Stromrichtung nicht mehr vom Kern nach außen hin abfällt, sondern im Bereich des Ringumfangs von innen nach außen anwächst. Die erste nach diesem Gesichtspunkt konstruierte Spule war die Zusatzspule 1 (auf linker Seite von Photo 17 des Photoanhangs). Es ist eine im Vergleich zu ihrem Innendurchmesser von ca. 5,9 cm sehr kurze Spule von etwa 3,5cm Länge mit 145 Windungen. In ihrem Inneren haben die Ringe 1, 1a, 1b, 4 und 5 Platz.

Ich nehme an, daß im Inneren der Spule die senkrechte Komponente des Magnetfeldes vom Zentrum bis zu ihrem Umfang hin zunimmt (Abb. s*5-11). Flüchtige Messungen mit einer kleinen Induktionsspule bestätigten dies. Außerdem ergab eine numerische Berechnung der magnetischen Feldstärke innerhalb eines stromdurchflossenen, infinitesimal dünnen Einzelringes einen stetigen Anstieg der Feldstärke in der Ringebene vom Zentrum bis zum Ringumfang (s. Anhang C). Eine exakte Berechnung der Feldstärke des Einzelringes in der Ringebene führt auf elliptische Integrale, die nicht analytisch auszudrücken und dadurch schwer handzuhaben sind (vergl. auch [Jackson, Abschnitt 5.5]).

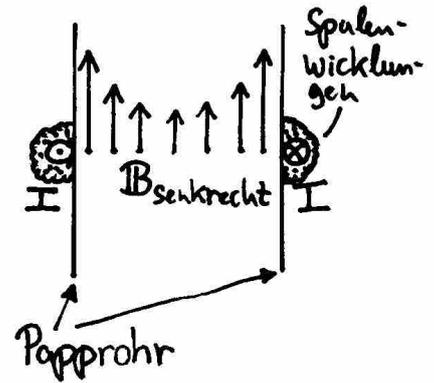


Abb. s*5-11: Magnetspule in Zusatzspule 1.

Die Zusatzspule 1 war dafür konzipiert, in demselben Wicklungssinn wie die Hauptspule in Reihe zu dieser geschaltet zu werden und über den aus der Hauptspule herausragenden Kern gestülpt zu werden. Das Problem an diesem Aufbau war, daß die senkrechte Komponente des gesamten Magnetfeldes nun an den Stellen, wo sich der Ring befand, nach oben zeigte, so daß der Ring wie derjenige in Position ① der Abb. p*5-10 instabil bezüglich Verdrehungen wurde.

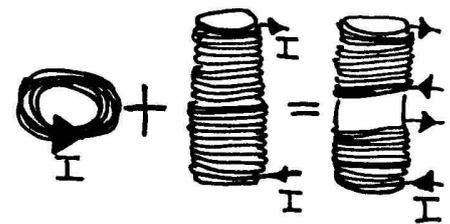


Abb. t*5-11: Reduktion von zwei Spulen zu einer.

Meine folgende Idee war, zusätzlich zur ersten Spule eine zweite lange Spule von fast identischem Durchmesser zu installieren, die ein ziemlich homogenes nach unten zeigendes Magnetfeld erzeugt. Aus Abb. t*5-11 wird jedoch klar, daß man beide in unterschiedlicher Richtung von Strom durchflossenen Spulen zu einer einzigen kombinieren kann, die auf der Länge der kürzeren Spule einen von Wicklungen freigelassenen Bereich hat: zwei an demselben Ort in entgegengesetzte Richtung fließende Ströme gleicher Stärke annullieren sich vollständig in ihren magnetischen Auswirkungen. Nach diesem Prinzip ist die Zusatzspule 2 gebaut (Abb. u*5-12 und Photo 17 des Photoanhangs). In das Innere dieser Spule passen dieselben Ringe wie bei der Zusatzspule 1.

Wieder zeigte sich beim Experiment eine vorher nicht bedachte Tücke: Durch die Zusatzspule 2 werden neben den senkrechten Komponenten des Magnetfeldes auch dessen horizontale Komponenten verändert. Dadurch wird die senkrechte Komponente der auf den Ring wirkenden Lorentzkraft beeinflusst. Dies hat zur Folge, daß der Ring von dem Bereich der Spule, der von Wicklungen freigelassen wurde, abgestoßen wird. Ärgerlicherweise ist das genau der Ort, wo der Ring stabilisiert werden sollte.

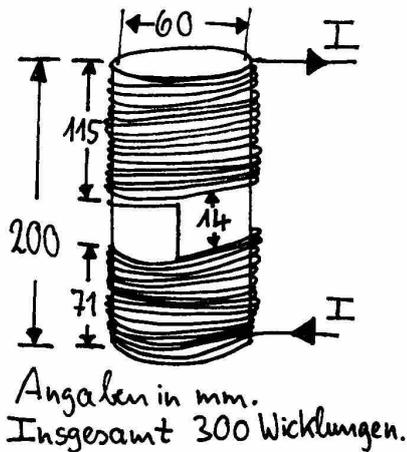


Abb. u*5-12: Zusatzspule 2.

d) Prinzipielle Hindernisse. Nach dieser Reihe von Mißerfolgen hatte ich den Verdacht, daß die auftretenden Hindernisse von grundsätzlicher Art seien. Ich vermutete also, daß eine völlige Stabilisierung des Ringes durch zusätzliche, in Reihe zur Hauptspule geschaltete, nach einfachen sich an den Lorentzkraften auf den Ring orientierenden Überlegungen konzipierte Spulen aus prinzipiellen Gründen unmöglich sei. Der Verdacht war richtig. Bei unseren Überlegungen wurden die auf den Ring wirkenden Lorentzkraften aus einer statischen Situation ermittelt. Wenn der Ring durch nach unseren Überlegungen funktionierenden Zusatzspulen stabilisiert würde, müßte er auch dann frei schweben, wenn die Spule mit Gleichstrom beschickt würde und im Ring ebenfalls Gleichstrom, jedoch in entgegengesetzter Richtung, etwa durch eine kleine Batterie aufrechterhalten würde. Induktion würde hier natürlich keine Rolle spielen. Das statische, stabile, freie Schweben eines Systems I im magnetischen Feld eines anderen Systems II ist jedoch nach Braunbeck unmöglich, solange keine diamagnetische Materie mit im Spiel ist (siehe wörtliche wiedergegebenes Zitat im Abschnitt 2.3). Wie im Artikel [Braunbeck] als Punkt f) behandelt, jedoch im obenangegebenen Zitat nicht ausdrücklich gesagt, gilt Braunbecks Aussage auch für den Fall, wo in den Systemen zeitlich konstante Ströme fließen. Abb. u*5-12

e) Ausblick. Es wäre falsch, zu folgern, daß der Ring unter keinen Umständen mit zusätzlichen Spulen frei stabilisiert werden kann – nur können Überlegungen der obigen Art nicht zur Erklärung der Ursache einer eventuellen Stabilisierung führen.

Denkbar wäre eine Stabilisierung durch Phasenverschiebungen zwischen den einzelnen Strömen in unterschiedlichen Höhen des massiven Ringes. Dies wird auch im Buch [Laithwaite1, Seiten 186, 190–192, 195–197, 204–206] als Voraussetzung für das schon in Kapitel 3 erwähnte stabile, freie Schweben der Aluminium-Hohlkugel und der Aluminium-Kreisscheibe über den dort abgebildeten Anordnungen von Spulen und Eisenblechen angenommen. Laithwaite benutzt zur Erklärung den Vergleich des zeitlich sich verändernden magnetischen Flusses mit einem aus Wasser bestehenden, geologischen Fluß. Metallstücke sollen ähnliche mitreißende Kräfte im magnetischen Fluß erfahren wie schwimmende oder eingetauchte Körper von den Wassermassen eines realen Flusses. Das Erklärungsmodell ist physikalisch etwas fraglich und der Geltungsbereich dieses Vergleiches ist sicher limitiert.

6 Didaktik

Der Themenkreis Levitation wäre inhaltlich genug, eine einsemestrige Vorlesung mit Stoff zu füllen. Innerhalb der zweisemestrigen Einführungsvorlesung in Experimentalphysik bietet es sich an, etwa zwei Vorlesungstermine im zweiten Semester dem Thema Schweben zu widmen, wobei man sich auf das Allerwesentlichste beschränken muß. Als Zeitpunkt ist die Vorlesungsstunde geeignet, in der das Induktionsgesetz und die Lenzsche Regel eingeführt werden. Diese beiden Gesetze können ausgezeichnet an der Thomson-Ring-Apparatur demonstriert werden.

6.1 Vorschläge zur Behandlung des Themas Levitation in Vorlesungen

Zur Übersicht über das Thema Levitation in seinen verschiedensten Erscheinungsformen kann zur Einleitung oder auch nach Vorführung einiger Experimente das am Ende der Einleitung abgebildete Baumdiagramm 'Möglichkeiten der Levitation' gezeigt werden.

Von der Theorie des elektromagnetischen Schwebens sollte wegen dessen grundlegender Bedeutung das Theorem von Earnshaw auf jeden Fall behandelt werden. Da es jedoch im zweiten Semester nicht sinnvoll ist, die Stabilitätsbetrachtungen unter Zuhilfenahme des Gaußschen Satzes darzustellen, schlage ich vor, nur die prinzipielle Unmöglichkeit des stabilen Schwebens einer Punktladung in einem äußeren elektrostatischen Feld an Hand des Feldlinienbildes Abb. b*2-1 zu erläutern. Bei Wunsch nach mehr Detail kann folgendermaßen argumentiert werden, warum eine positive Punktladung nicht frei in einem elektrostatischen Feld \mathbf{E} schweben kann:

Notwendige Bedingung für Stabilität ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial i} < 0, \quad i = x, y, z,$$

wobei \mathbf{F} die Kraft auf die Punktladung bezeichnet. Daraus folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0.$$

Dies ist jedoch am Ort der Punktladung unmöglich, da

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \sim \operatorname{div} \mathbf{E} \sim \rho$$

gilt, und am Ort der positiven Punktladung die Ladungsdichte $\rho < 0$ nicht negativ kann.

Auf die Möglichkeit einer Verallgemeinerung des Theorems kann in der Form hingewiesen werden, daß das in Abschnitt 2.3 der Studienarbeit abgedruckte Fazit des Artikels von Braunbeck zitiert wird.

Eine verblüffende Konsequenz des Theorems von Earnshaw ist die Unmöglichkeit, im Rahmen der Elektrostatik und unter der Annahme von Punktteilchen zu erklären, warum viele Atome, Moleküle und Festkörper stabil sind. Atome können jedoch wohl auf diese Weise als stabil verstanden werden, wenn man annimmt, daß eine der beiden geladenen Teilchensorten nicht als Punktladungen existieren, sondern über einen größeren Bereich verschmierte Ladungswolken bilden. Die beiden in Frage kommenden Möglichkeiten sind in Abb. a*6-1 am Wasserstoffatom illustriert. Und wirklich gab es Anfang dieses Jahrhunderts den Vorschlag, Atome als verschmierte positive Ladungswolken anzusehen, worin punktförmige Elektronen schwimmen: das Atommodell von Thomson (Abb. b*6-1). Dieses Modell scheiterte jedoch am berühmten Rutherford'schen Streuexperiment.

Heute weiß man, daß in der Welt der kleinsten Teilchen mikroskopische Effekte auftreten, die sich nicht innerhalb der klassischen Elektrodynamik erklären lassen. Zur Berechnung dieser Phänomene wird die Quantenmechanik benutzt. Klassische Erklärungen der Stabilität von Materie gelten als überholt.

Falls in der Vorlesung genug Zeit vorhanden ist, kann das interessante Gebiet der schwebenden Züge angeschnitten werden. Darauf und auf Möglichkeiten, Experimente mit schwebenden Kreiseln vorzuführen, wird hier nicht eingegangen.

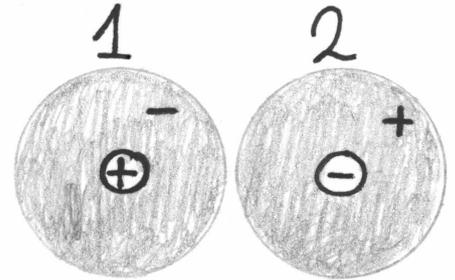


Abb. a*6-1: Punktladungen schweben in Ladungswolken entgegengesetzten Vorzeichens.

Beispiel Beryllium

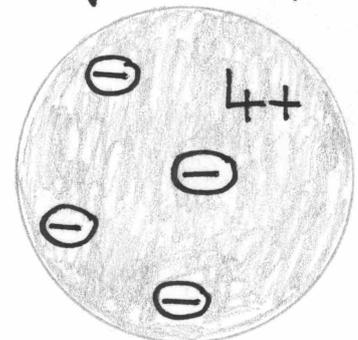


Abb. b*6-1: Thomsons Atommodell.

Ausblicke auf Versuche mit dem Levitron sind im Abschnitt 4.4 gegeben. Der folgende Abschnitt behandelt nur die noch fehlenden

6.2 Vorschläge zur Benutzung der Thomson-Ring-Apparatur in Vorlesungen.

Zu Beginn sollte der einfachere der beiden Hauptversuche gezeigt werden, der Versuch ‘springender Ring’. Zur Erklärung werden das Induktionsgesetz sowie die Lenzsche Regel benutzt. Dabei wird am besten $\dot{\mathbf{B}}_{Spule}$ als Induktionsursache angesehen und \mathbf{B}_{Ring} als Induktionswirkung. Es muß betont werden, daß hier nicht das Magnetfeld \mathbf{B} als Induktionsursache gelten kann, sondern nur dessen zeitliche Veränderung. Die Abstoßung des Ringes wird am einfachsten als Abstoßung zweier entgegengesetzt gepolter magnetischer Dipole erklärt.

Während Sprungexperimente mit verschiedenen Ringen vorgeführt werden, kann zwischendurch der durchbrochene Ring auf den Kern gesteckt werden. Er wird sich natürlich überhaupt nicht bewegen, obwohl wie bei allen anderen Ringen an der Schaltstelle Zündfunken springen.

Bei den Sprungversuchen kann noch ein rein Ohmscher Widerstand für die Ringe angenommen werden – explizit oder stillschweigend, indem man die Kurven aus Abb. c*5-1 präsentiert –, ohne daß man qualitativ falsche Ergebnisse bekommt. Im Versuch ‘schwebender Ring’ ist das anders. Mir selbst war zunächst gar nicht klar, daß in den Kurven der Abb. c*5-1 sowie in den aus den ersten Erklärungsversuchen zum schwebenden Ring entspringenden Kurven der Abb. g*5-3 ein rein Ohmscher Widerstand des Ringes impliziert wird. Da ich vermutete, daß es auch anderen so gehen wird, schlage ich vor, erst ohne überhaupt auf die Art des Ringwiderstandes einzugehen die zu der Abb. c*5-1 und der Abb. g*5-3 führenden Gedankenschritte durchzuführen. Die Zuhörer werden auf diese Weise ähnliche Gedankengänge erleben, wie nachdenkliche Physikfreunde, die den schwebenden Ring unvorbereitet zu sehen bekommen. Daß nach der untersten Kurve der Abb. g*5-3 die auf den Ring wirkende Lorentzkraft im zeitlichen Mittel verschwindet, dürfte zunächst verblüffen. Um zum selbständigen Nachdenken anzuregen, kann die Frage nach der Ursache des Schwebens als Übungsaufgabe gestellt werden.

Die in der Studienarbeit favorisierte Erklärung durch eine induktivitätsverursachte Phasenverschiebung kann erklärt, die Phasenverschiebung eventuell sogar in der Vorlesung am Oszilloskop gezeigt werden. Die Rolle der Vibrationen des Ringes für die mittlere nach oben zeigende Kraft könnte höchstens an einem noch zu findenden einfachen Näherungsmodell oder durch andere Abschätzungen geklärt werden.

Um eine Vorstellung davon zu vermitteln, welche Stärke die induzierten Ströme haben, braucht man nur auf die unter geeigneten Rahmenbedingungen enorme Wärmeentwicklung in den Ringen hinzuweisen. Ein erhitzter Ring kann durch die Reihen gegeben werden, wobei man natürlich vor Verbrennungsgefahr warnen muß.

Zum Abschluß eignen sich Schwebexperimente mit mehreren Ringen gleichzeitig. Dabei sind Anordnungen zweier ineinandergeschachtelter Ringe möglich (Ringe 2-1, 6-1, 7(festgehalten)-beliebiger) oder auch mehrere Ringe übereinander. Die Ringe ziehen sich fast immer gegenseitig an. Eine Ausnahme ist jedoch in [Laithwaite2] gegeben: Wenn ein seitlich sehr ausgedehnter Ring über einen dicken, aber engeren Ring gehalten wird, stoßen die Ringe sich ab.

Ein schönes Experiment ist es, immer mehr gleiche, dünne Ringe übereinander zu stapeln. Die Schwebehöhe nimmt dabei mehr und mehr zu, wobei die Ringe aneinander zu kleben scheinen. So läßt sich das Zusammenspiel des gesamten Ohmschen Widerstandes und der gesamten Induktivität beobachten. Eine größere Anzahl von gleichen Ringen sind jedoch bei uns noch nicht vorhanden.

6.3 Technische Hinweise und Vorschläge für apparative Einstellungen bei Versuchen mit der Thomson-Ring-Apparatur

Zunächst warne ich dringend vor dem von mir benutzten Transformator, der Spannungen bis zu 230 V liefert. Dies ist kein Trenntrafo. Das bedeutet, daß bei falscher Polung des Netzsteckers in der Steckdose beide Ausgangsbuchsen des Netzgerätes auf 230 V liegen, falls eine Spannung von Null am Drehknopf eingestellt wurde. Der Stecker des Transformators ist mit blauen und schwarzen Punkten bemalt. Der schwarz gekennzeichnete Anschluß gehört an die Phase der Steckdose, der blau gekennzeichnete an den Nulleiter.

Stichpunktartig folgen noch Vorschläge für Einstellungen der Apparatur bei den Experimenten.

springender Ring:

- Blumendrahtkern, 120–160 V, Ring 5 (bester Springer)
- außerdem die Ringe 1, 3, 6 und der durchbrochene Ring

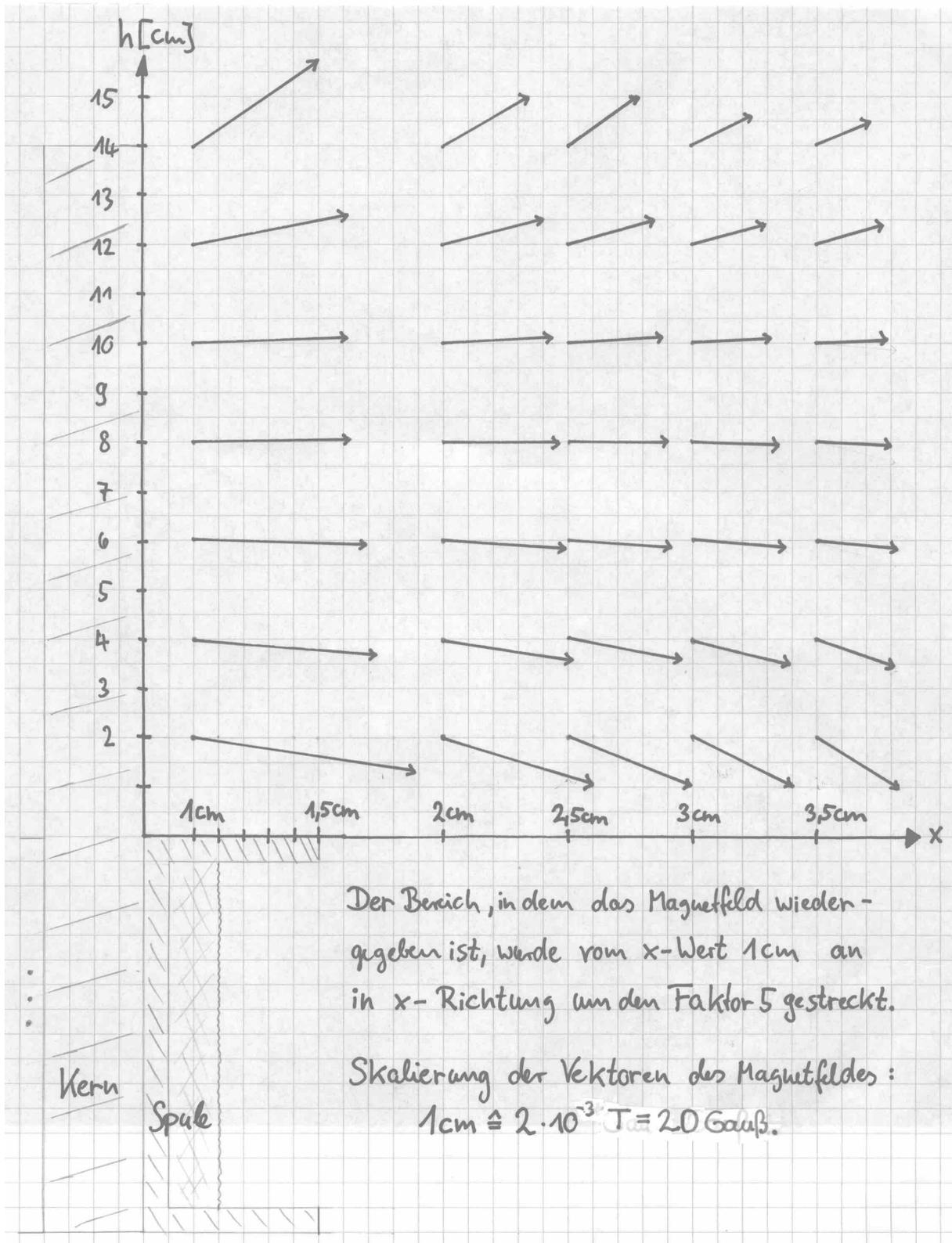
Bei diesem Versuch wurde als Schalter ein in eine der beiden Bananensteckerbuchsen der Apparatur gesteckter einzelner, blanker, kabelloser Bananenstecker verwendet, der mit dem Bananensteckerende eines am Netzteil angeschlossenen Bananensteckerkabels berührt wurde. Als Quelle diente der Wechselspannungstransformator.

schwebender Ring:

- Blumendrahtkern, 80 V, Ringe 5, 3, 6
- zwei Ringe nebeneinander: 2-1, 6-1, 7(festgehalten)-beliebiger

Anhang A (zur Thomson-Ring-Apparatur)

Skizze des Magnetfeldes der Apparatur mit Blumenstrahlkern



noch Anhang A

(zur Thomson-Ring-Apparatur)

Meßdaten des Magnetfeldes der Apparatur mit Blumendrahtkern

Die Einträge in den Spalten sind von der Form

horizontale Komponente / vertikale Komponente.

Angegeben wurden die gemessenen Hall-Spannungen in mV.

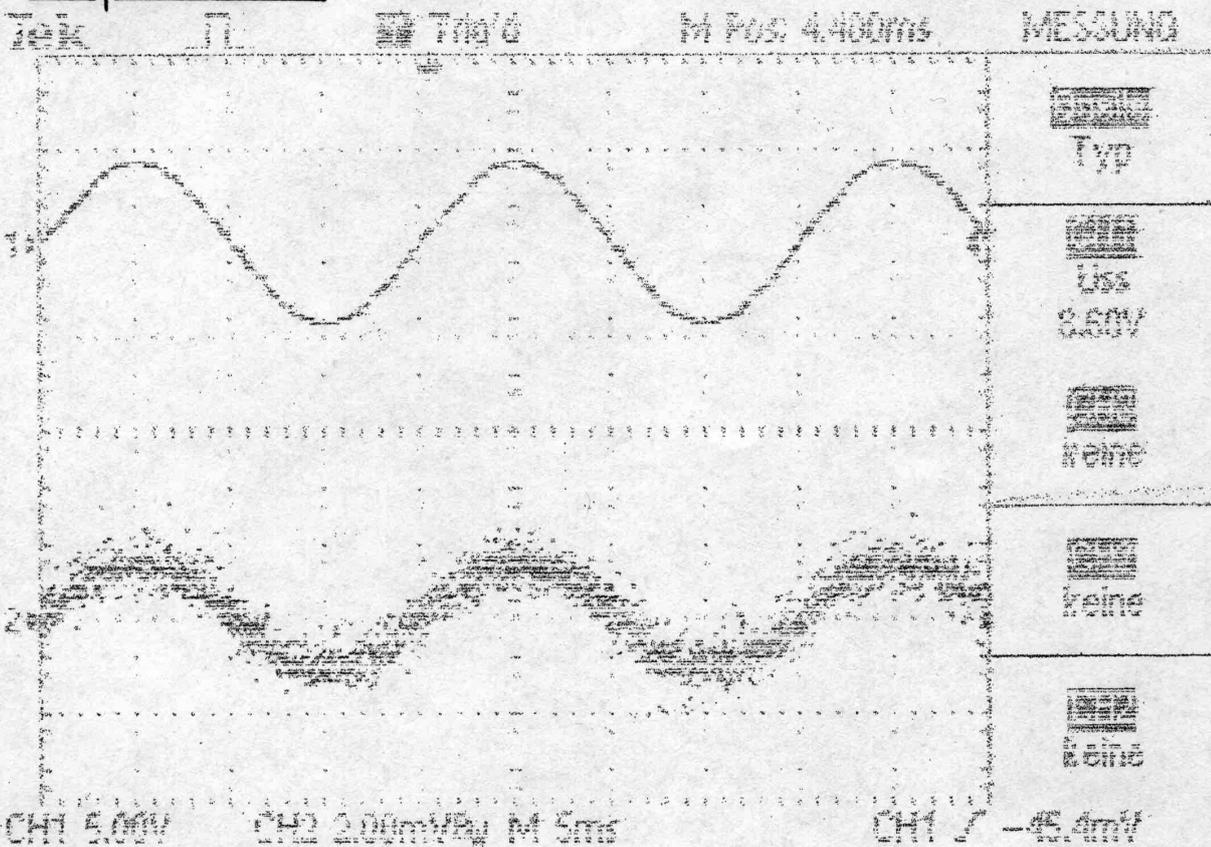
Dabei entsprechen $1 \text{ mV} \hat{=} 2 \cdot 10^{-4} \text{ T} = 2 \text{ Gauß}$.

Höhe[cm]	Entfernung zur Wand des Plexiglaszylinders des Blumendrahtkerns					
	1 cm	1,5 cm	2 cm	2,5 cm	3 cm	3,5 cm
2	44,3/-6,8	36,0/-8,3	30,0/-9,2	24,3/-9,8	19,7/-9,9	16,8/-9,9
3	40,2/-4,3	33,2/-5,5	27,2/-6,0	23,0/-6,9	19,8/-6,5	16,7/-7,0
4	37,1/-2,8	30,7/-4,0	26,3/-4,4	22,3/-4,8	19,1/-4,9	16,4/-5,1
5	36,2/-1,9	30,1/-2,5	25,1/-3,2	21,2/-3,3	17,9/-3,5	15,9/-4,0
6	33,9/-0,8	28,6/-1,3	24,2/-1,9	20,7/-2,0	18,4/-2,2	15,8/-2,4
7	33,3/-0,1	27,8/-0,5	24,0/-0,9	20,5/-1,2	18,0/-1,3	15,7/-1,4
8	32,1/0,4	26,9/0,3	22,9/0,0	19,8/-0,2	17,3/-0,3	15,0/-0,4
9	31,1/1,2	25,8/1,1	21,9/1,0	19,2/ 0,7	16,6/0,6	14,9/0,5
10	30,6/1,8	25,1/1,8	21,6/1,8	18,4/1,6	16,1/1,5	14,0/1,3
11	30,1/3,4	24,7/3,4	20,8/3,3	17,7/2,9	15,2/2,8	13,4/2,2
12	30,6/5,9	24,8/5,5	20,0/5,1	17,1/4,7	14,3/4,1	12,6/3,5
13	30,9/11,2	24,0/9,3	19,5/7,7	16,4/6,5	14,0/5,6	12,1/4,6
14	24,1/17,2	20,4/12,5	16,6/9,6	14,1/7,9	12,1/6,5	10,5/5,4
15	14,9/16,8	13,5/13,0	11,7/10,4	10,6/8,4	9,3/7,0	8,6/5,8

Anhang B

Meßkurve 1:

Spulenstrom, Magnetfeld der Apparatur



Die obere und die untere Kurve sind in Phase.

Oben: Spulenstrom

(genauer gesagt der Spannungsabfall an einem Lastwiderstand von $2,2 \Omega$)

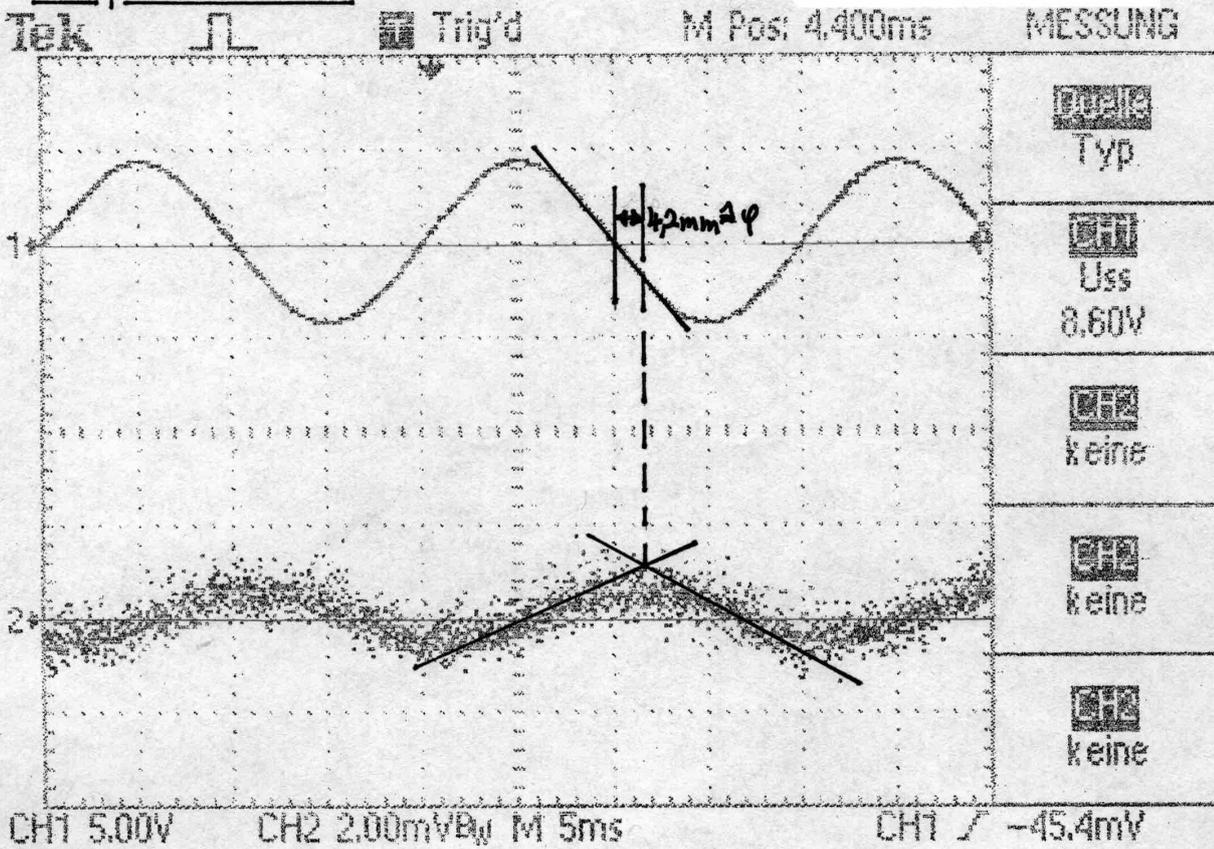
Unten: Magnetfeld am oberen Ende des Bleimendrahtkerns
(gemessen wurde die Hall-Spannung einer Hall-Sonde)

1 Kästchen $\hat{=} 2 \text{ mV} \hat{=} 40 \text{ Gauß}$ (vertikal)

noch Anhang B

noch Anhang B

Meßkurve 2: Spulenstrom, Strom durch Ring 1



$$14,1\text{mm} \hat{=} 90^\circ$$

$$\text{Phasenverschiebung } \varphi = 27^\circ$$

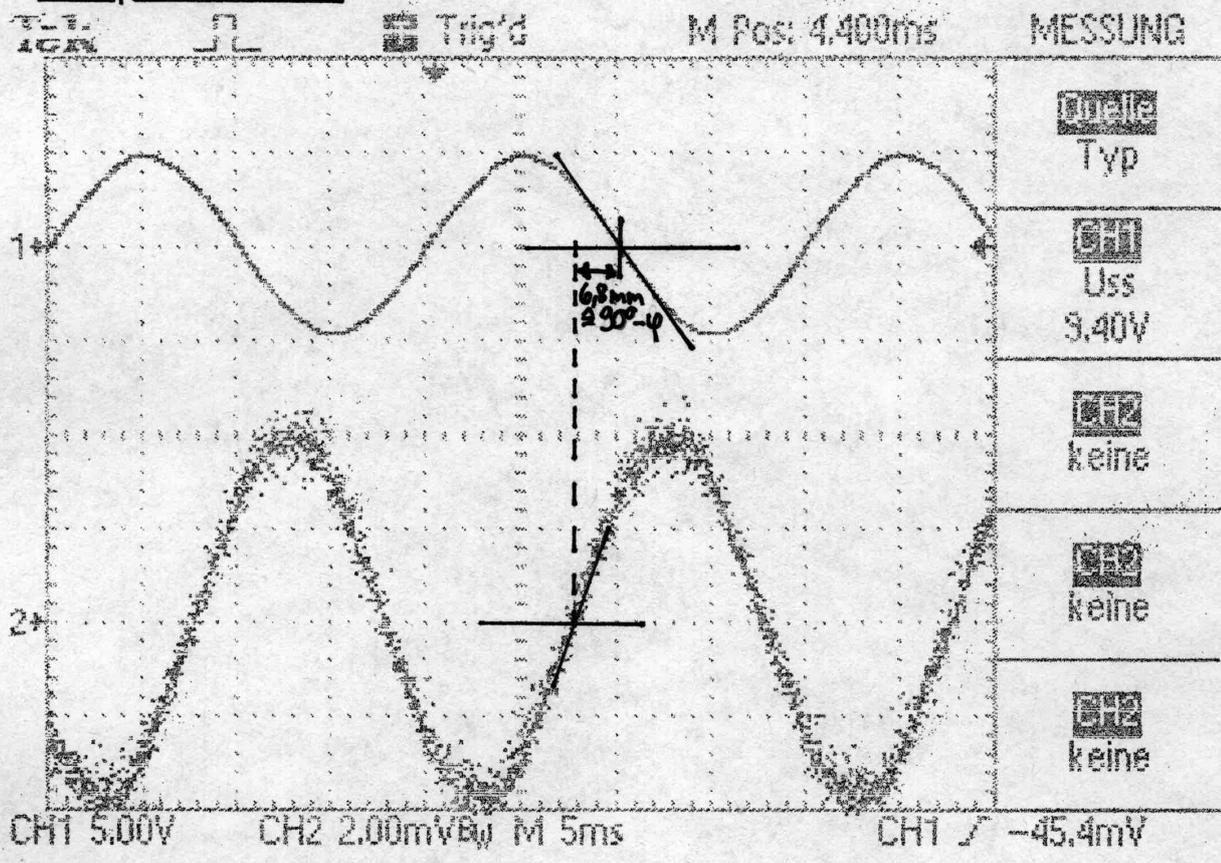
oben: Spulenstrom
(genauer gesagt der Spannungsabfall an einem Lastwiderstand von $2,2\Omega$)

unten: Strom durch Ring 1
(Mit einer Hall-Sonde wurde das vom durch den Ring 1 fließenden Strom erzeugte Magnetfeld gemessen.)
 $1\text{Kästchen} \hat{=} 2\text{mV} \hat{=} 40\text{Gauß}$ (vertikal)

noch Anhang B

noch Anhang B

Meßkurve 3



16,8 mm $\hat{=}$ 90° (horizontal)

Phasenverschiebung $\varphi = 47^\circ$

oben: Spulenstrom
(genauer gesagt der Spannungsabfall an einem Lastwiderstand von 2,2 Ω)

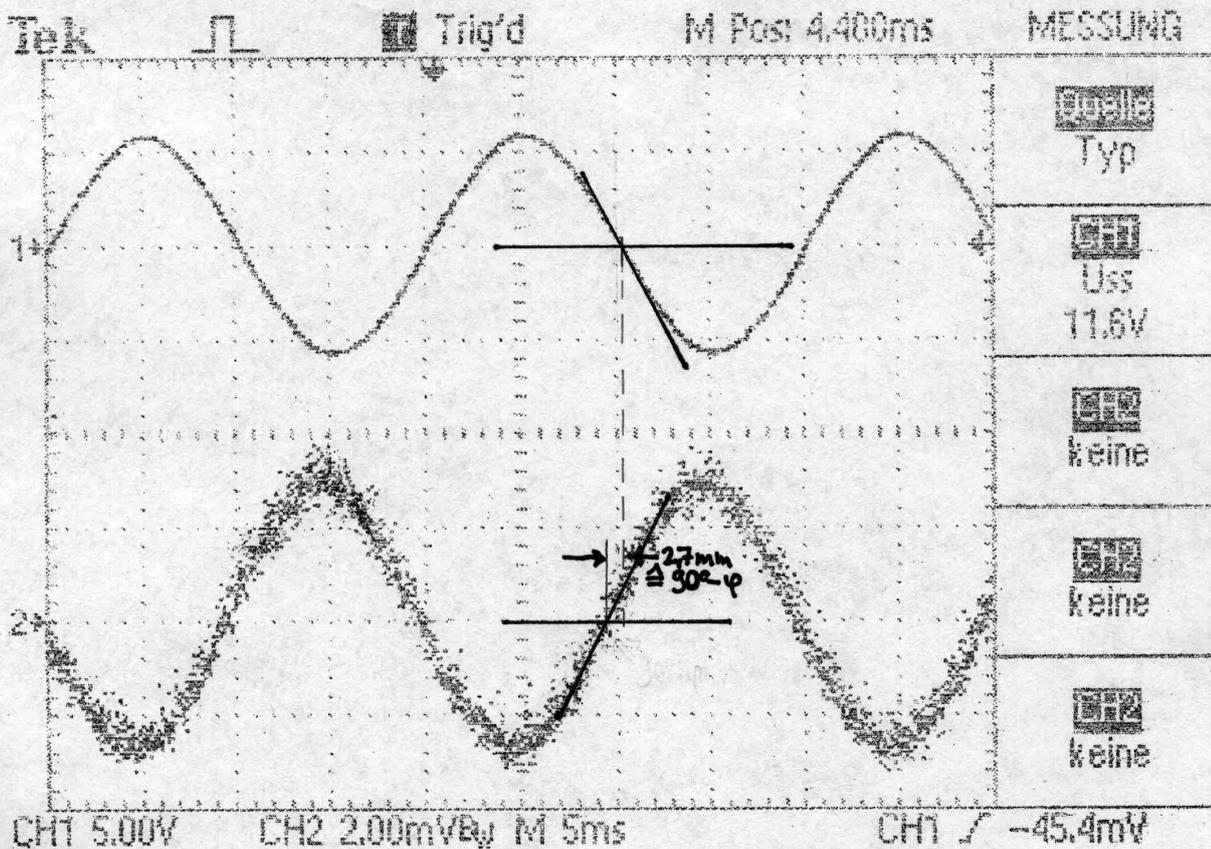
unten: Strom durch Ring 5
(Mit einer Hall-Sonde wurde das vom durch den Ring 5 fließenden Strom erzeugte Magnetfeld gemessen.)

1 Kästchen $\hat{=}$ 2 mV $\hat{=}$ 40 Gauss (vertikal)

noch Anhang B

noch Anhang B

Meßkurve 4



14.1mm $\hat{=} 90^\circ$ (horizontal)

Phasenverschiebung $\varphi = 73^\circ$

Oben: Spulenstrom

(genauer gesagt der Spannungsabfall an einem Lastwiderstand von 2,2 Ω)

Unten: Strom durch die Schwebespule

(Mit einer Hall-Sonde wurde das vom durch die Schwebespule fließenden Strom erzeugte Magnetfeld gemessen.)

1 Kästchen $\hat{=} 2\text{mV} \hat{=} 40\text{ Gauß}$ (vertikal)

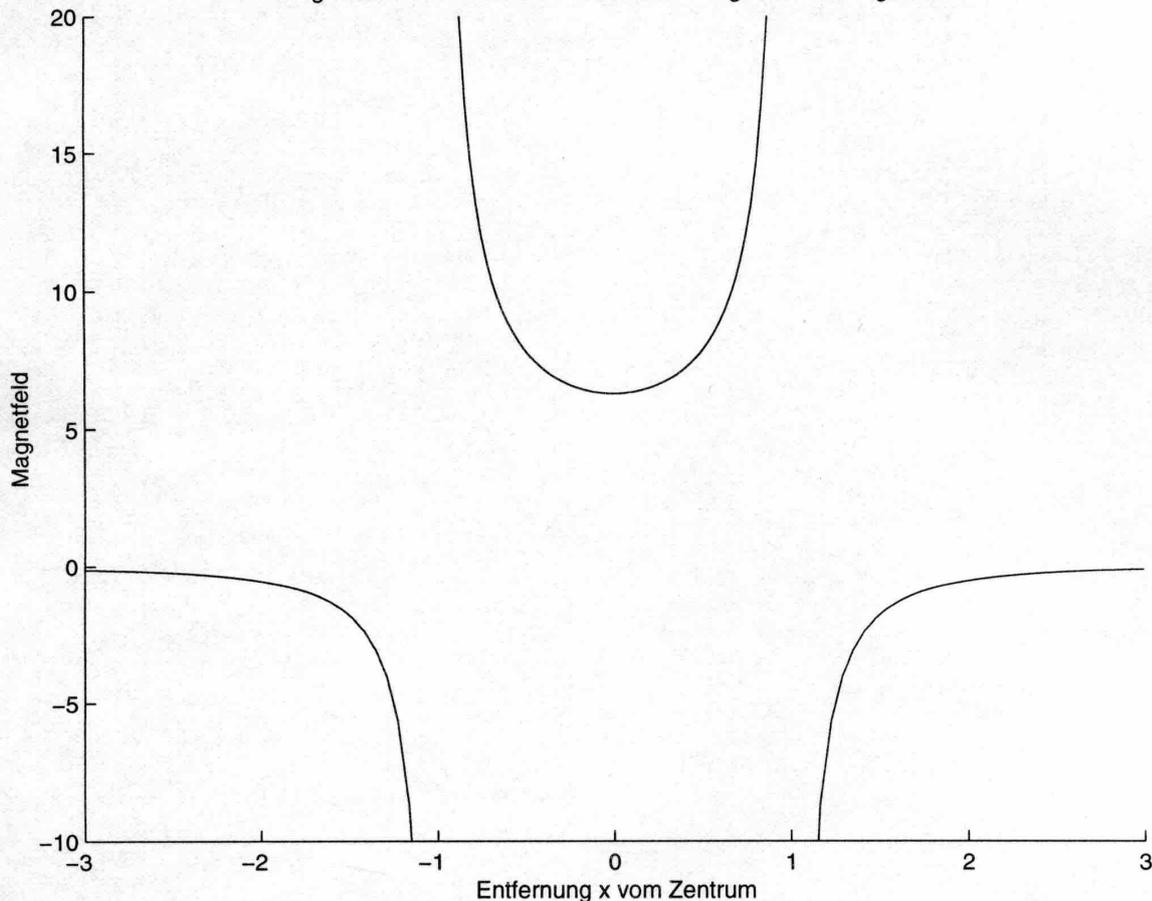
Anhang C

Magnetfeld eines stromdurchflossenen, infinitesimal dünnen Einzelringes in der Ringebene

Gezeichnet ist der Graph der Funktion

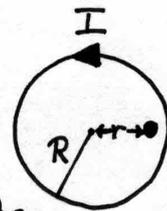
$$f(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - x \cos \varphi}{(1 + x^2 - 2x \cos \varphi)^{3/2}}$$

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Ringes in der Ringebene



Erläuterung

Das Magnetfeld des Ringes steht in jedem Punkt der Ringebene senkrecht auf dieser. Die senkrechte Komponente des Magnetfeldes eines vom Strom I durchflossenen, infinitesimal dünnen Einzelringes vom Radius R beträgt in der Entfernung r vom Mittelpunkt des Ringes in der Ringebene



$$B_{\perp}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - x \cos \varphi}{(1 + x^2 - 2x \cos \varphi)^{3/2}} \quad \text{mit } x := \frac{r}{R}.$$

Photoanhang

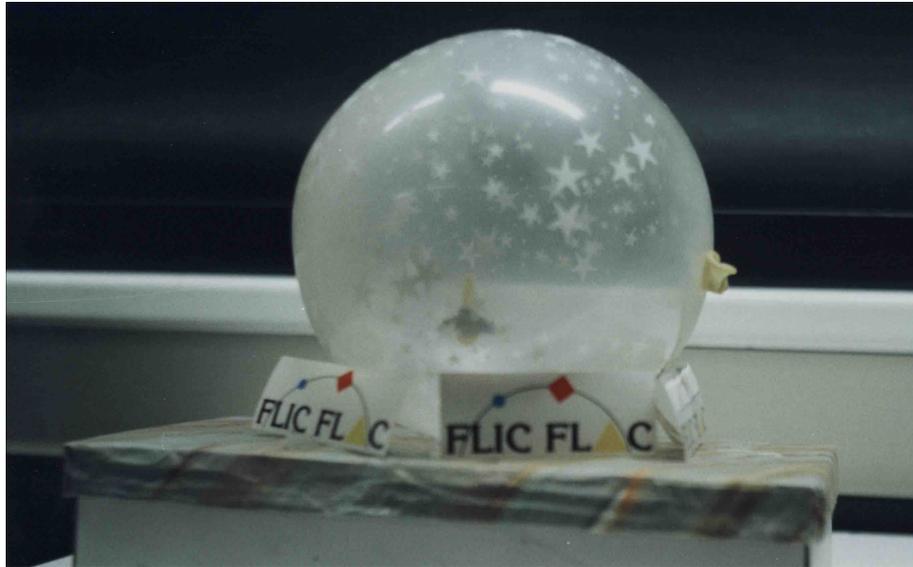
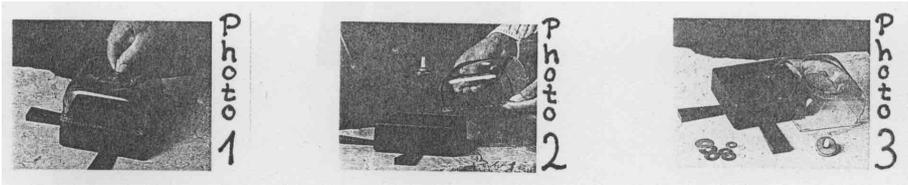


Photo 4

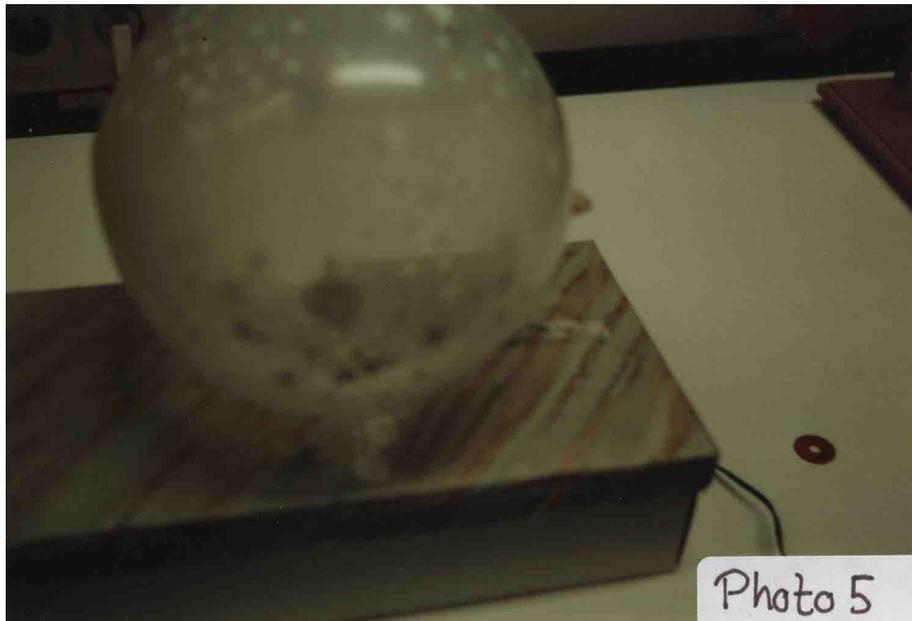
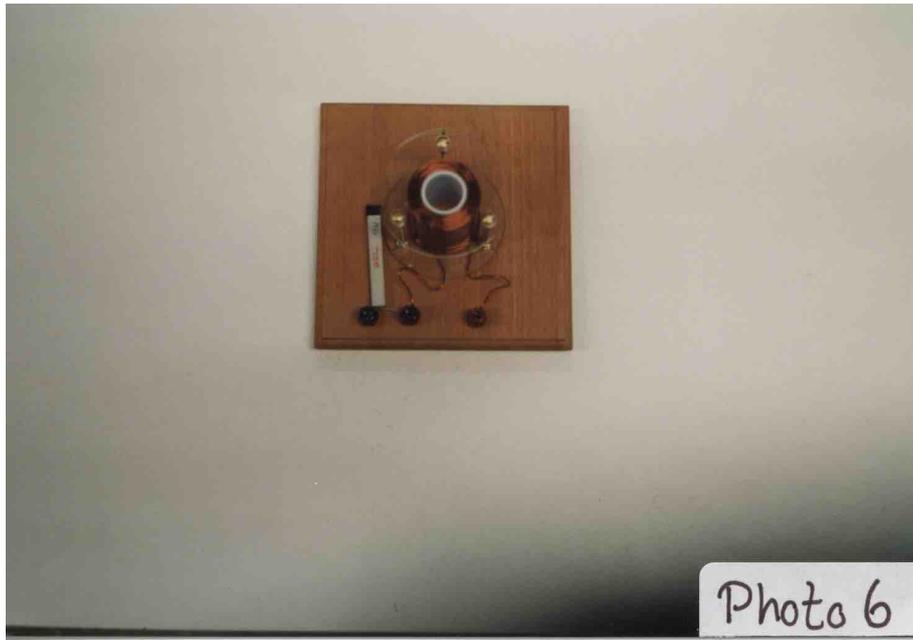


Photo 5



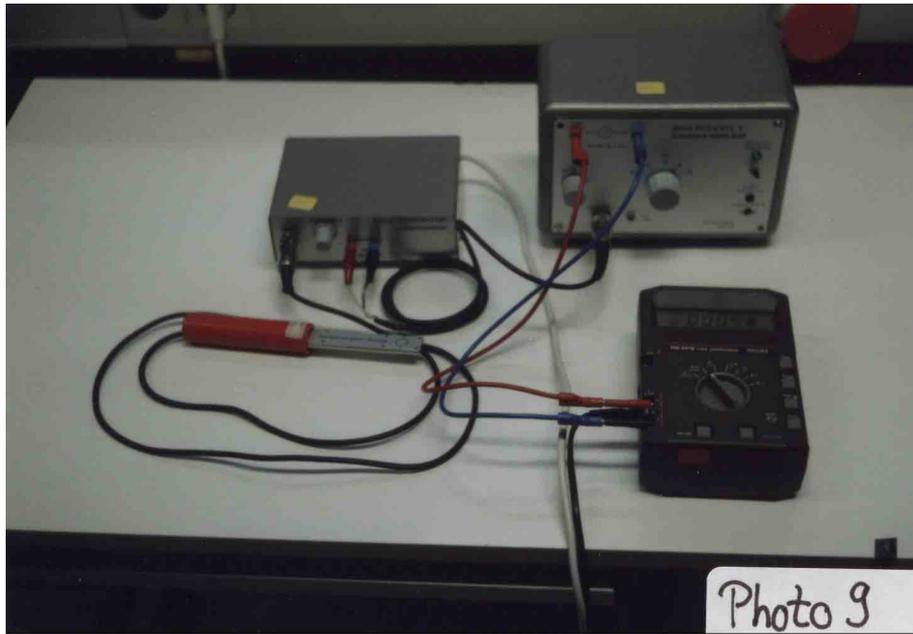


Photo 9

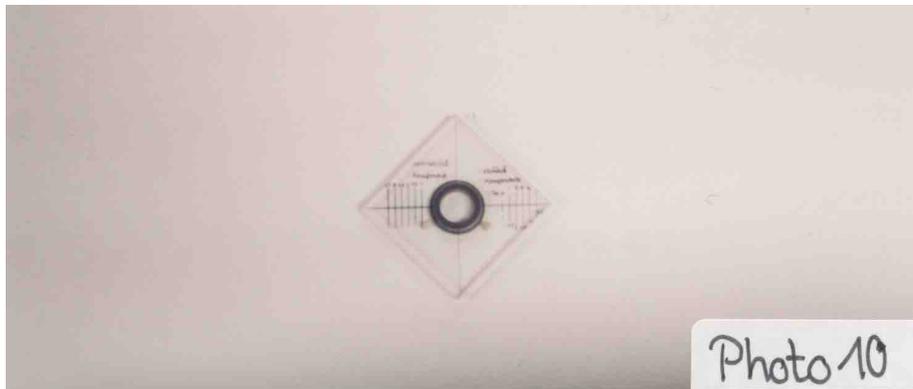


Photo 10

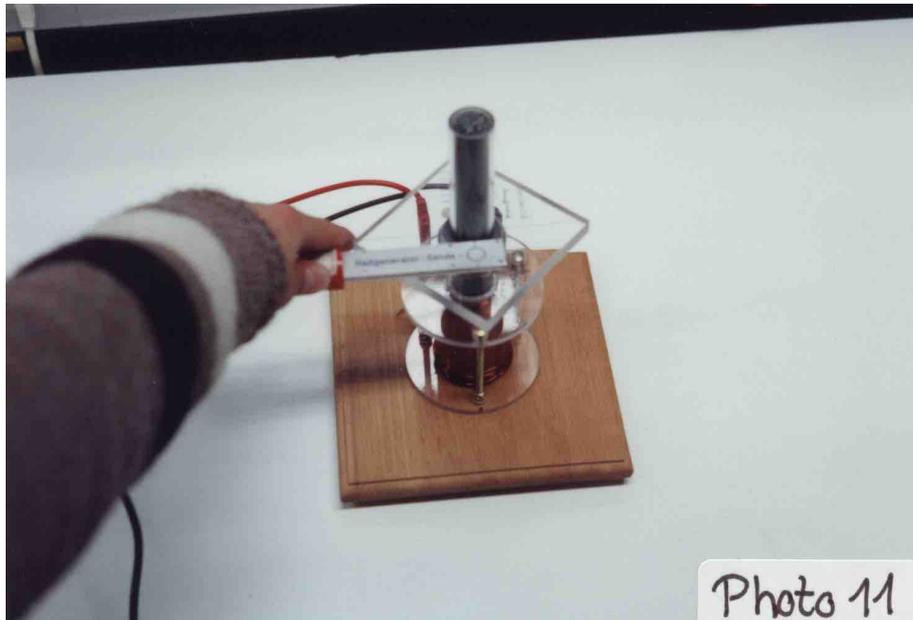


Photo 11

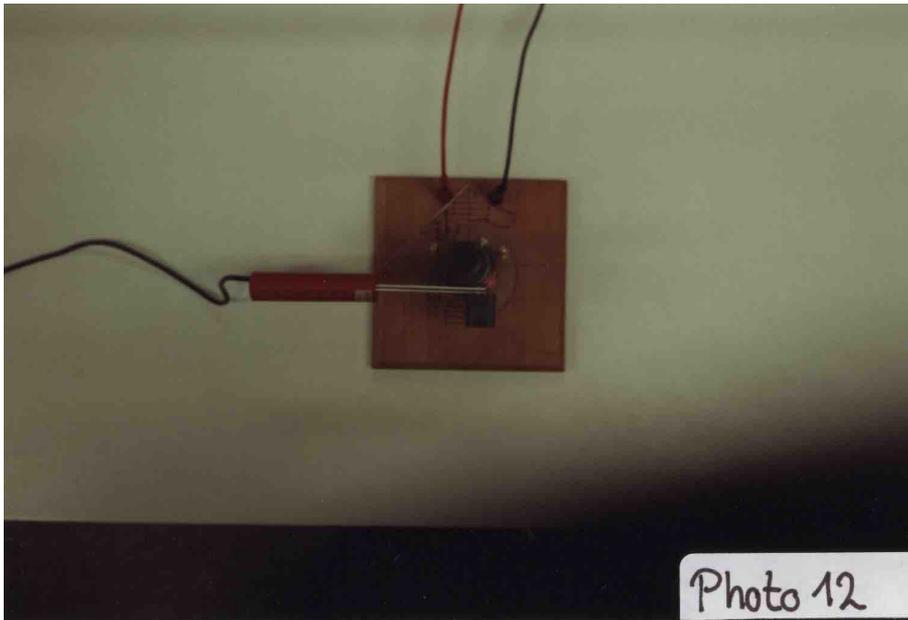


Photo 12

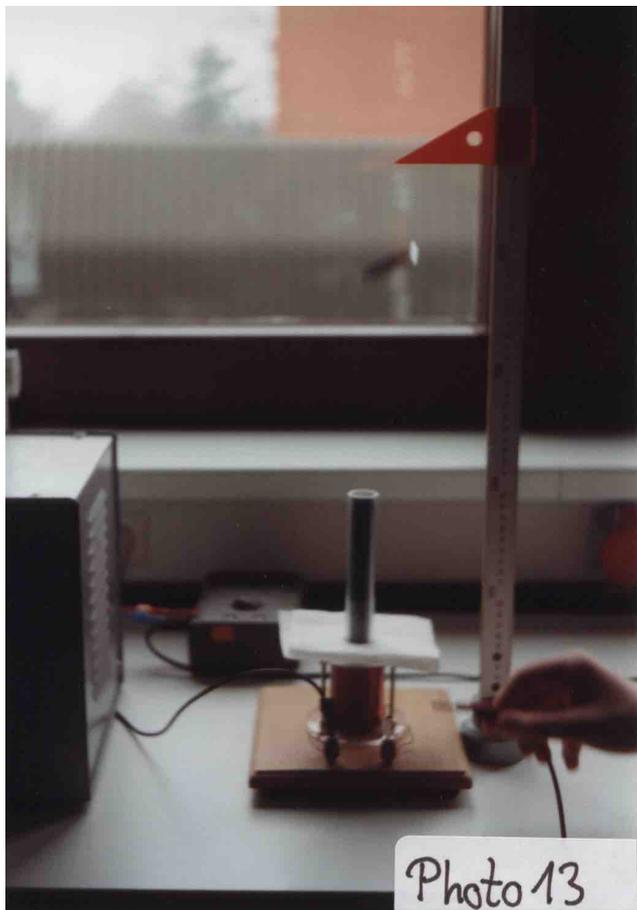
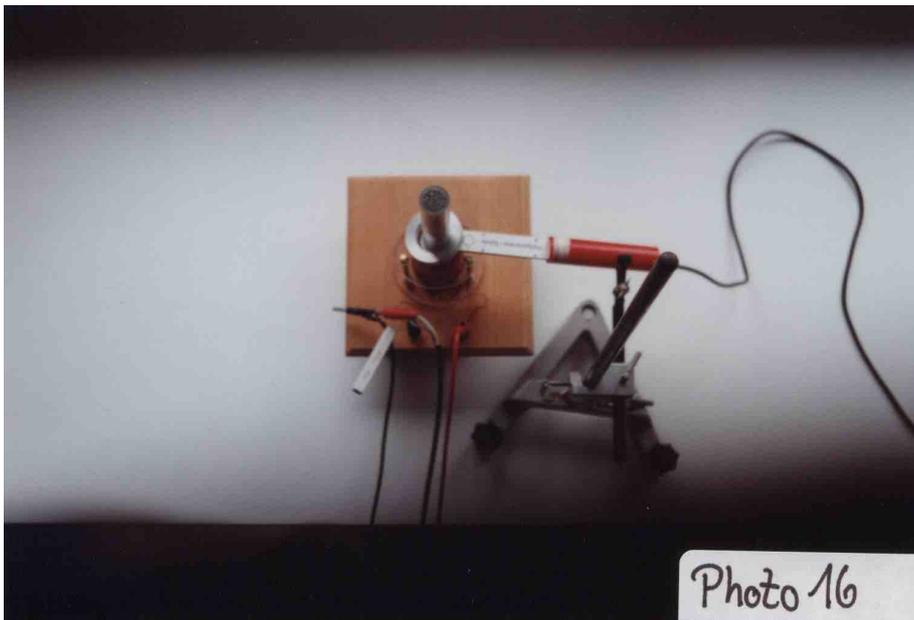
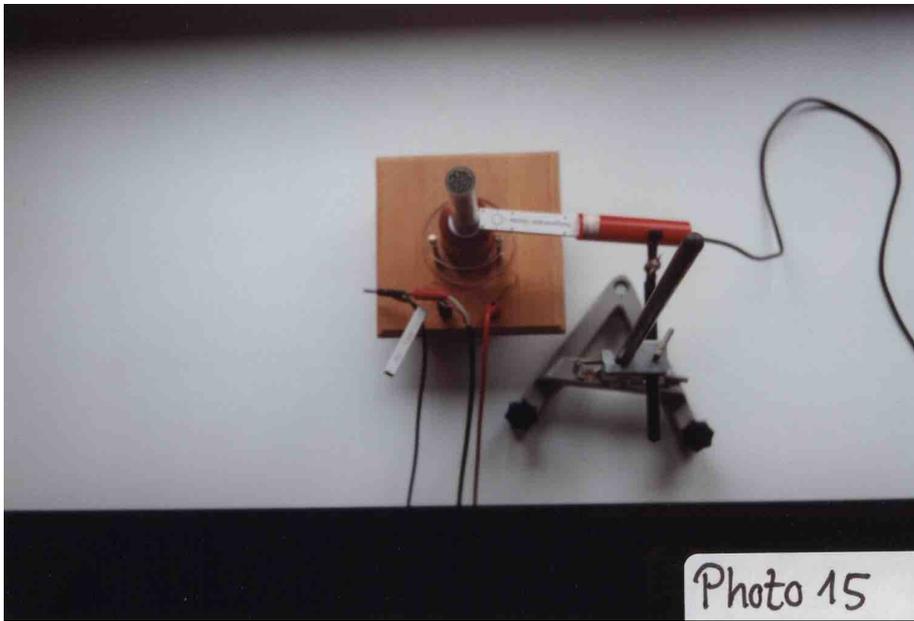
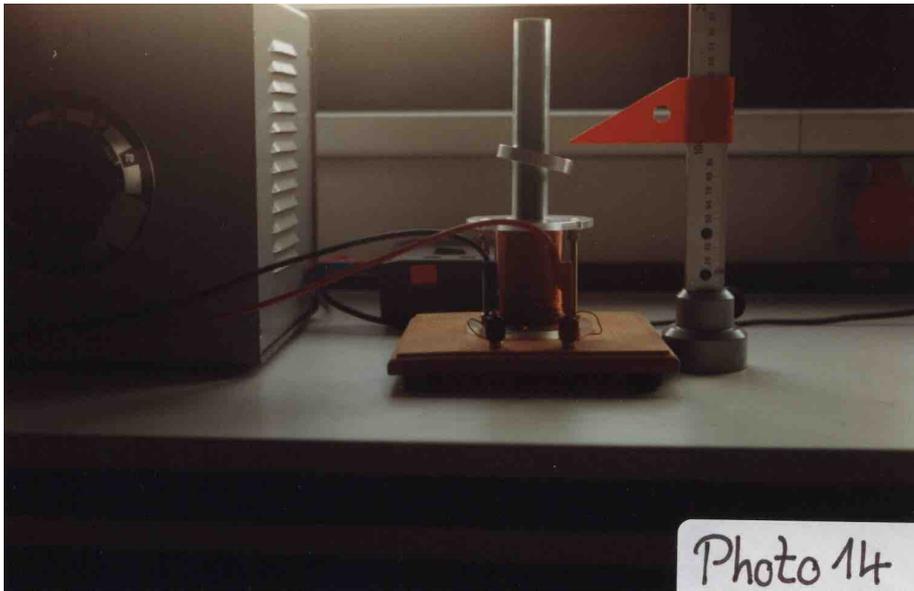


Photo 13



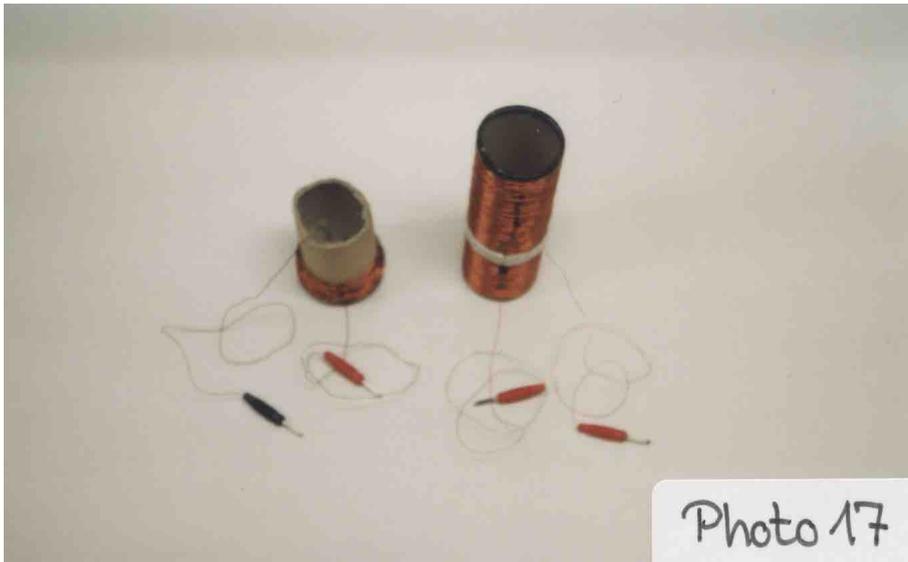


Photo 17



Photo 18

Literatur

- [ABC] Verlag Harrie Deutsch: 1974 *Fachlexikon ABC Physik*; Zürich.
- [Becker, Sauter] R. Becker, F. Sauter: 1973 *Theorie der Elektrizität, Band 1 (Einführung in die Maxwellsche Theorie, Elektronentheorie. Relativitätstheorie)*; B.G. Teubner, Stuttgart, 21., völlig neubearbeitete Auflage.
- [Berry] M.V. Berry: 1996 *The Levitron: an adiabatic trap for spins*; Proc. R. Soc. Lond. A **452**, S. 1207–1220.
- [Braunbeck] Werner Braunbeck: 1939 *Freischwebende Körper im elektrischen und magnetischen Feld*; Zeitschrift für Physik **112**, S. 753ff.
- [Brockhaus] F.A. Brockhaus Leipzig-Mannheim: 1996 *Die Enzyklopädie in 24 Bänden*; 20. Auflage.
- [Earnshaw] S. Earnshaw: 1842 *On the Nature of the Molecular Forces which regulate the Constitution of the Luminiferous Ether*; Transactions of the Cambridge Philosophical Society **7**, S. 97–112.
- [Fleming] J.A. Fleming, William Crookes: 1891 *Electro-magnetic Repulsion*; in W.L. Bragg and G. Porter (Ed.): 1970 *Physical Sciences*; The Royal Institution Library of Science, Band 4, Seiten 72–92, Elsevier, New York.
- [Führer] Führer, Heidemann, Nerreter: 1984 *Grundgebiete der Elektrotechnik*; Carl Hanser Verlag, München Wien.
Band 1: *Stationäre Vorgänge*; 5., bearbeitete Auflage.
Band 2: *Zeitabhängige Vorgänge*; 1. Auflage.
- [Gerthsen et al.] Christian Gerthsen, Hans O. Kneser, Helmut Vogel: 1998 *Physik*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 16. Auflage.
- [Gibbs, Geim] Philip Gibbs, Andre Geim: *Is Magnetic Levitation Possible?*; online im Internet: URL: <http://www.sci.kun.nl/hfml/levitation-possible.html> [Stand März 1997].
- [Gymnasialklasse] Denis Faupel, Moritz Groba: *Levitron geklont!*; online im Internet: URL: <http://users.aol.com/gykophys/levitron.html> [Stand November 1998].
- [Jackson] John David Jackson: 1962 *Classical Electrodynamics*; John Wiley&Sons, Inc., New York.
- [Jones et al.] T.B. Jones, Masao Washizu, Roger Gans: 15. July 1997 *Simple theory for the Levitron*; J. Appl. Phys. **82**, S. 883–888.
- [Jung] Volkhard Jung: 1988 *Magnetisches Schweben*; Springer-Verlag, Berlin.
- [Laithwaite1] E.R. Laithwaite: 1972 *Propulsion Without Wheels*; The English University Press LTD, Neudruck der 2. Auflage.
- [Laithwaite2] E.R. Laithwaite: 1963 *Discussion on Electromagnetic Levitation*; Institution of Electrical Engineers **113**, S. 1399, London.
- [Lindner] Lindner, Brauer, Lehmann: 1995 *Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik*; Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 6. verbesserte Auflage.
- [Lunze] Klaus Lunze: 1984 *Einführung in die Elektrotechnik*; Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 10., durchgesehene Auflage.
- [McBride] J.M. McBride: 1997 *A Toy Story, The Chemical Relevance of Earnshaw's Theorem, and How the Levitron Circumvents It*; ein auf der Gordon Research Conference on Physical-Organic Chemistry vom 29.6.-4.7.1997 gezeigtes Poster, online im Internet: URL: <http://koerner.chem.yale.edu/levitron.html> [Stand November 1997].
- [Meyers Lexikon] Bibliographisches Institut: 1975 *Meyers Enzyklopädisches Lexikon in 25 Bänden*; Mannheim, 9. Auflage.
- [Rossing, Hull] Thomas D. Rossing, John R. Hull: 1991 *Magnetic Levitation*; The Physics Teacher **29**, S. 552–562.

- [Simon et al.] Martin D. Simon, Lee O. Heflinger, S.L. Ridgway: 1997 *Spin stabilized magnetic levitation*; Am. J. Phys. **65**, S. 286ff.
Auch online im Internet: URL: <http://www.physics.ucla.edu/marty/levitron> [Stand November 1998].
- [Sumner, Thakkrar] D.J. Sumner, A.K. Thakkrar: 1972 *Experiments with a 'jumping ring' apparatus*; Physics Education **7** , S. 238–242.
- [Technik] Verlag Naumann und Göbel: 1991 *Wie Technik funktioniert*; Köln.
- [Ucke, Schlichting] Christian Ucke, Hans-Joachim Schlichting: 1995 *Levitron, der schwebende Kreisel*; Physik in unserer Zeit **5**, S. 217f.
- [Walker] Jearl Walker: 1977 *Der fliegende Zirkus der Physik* ; Oldenbourg Verlag, München.